

Übungen zur Vorlesung
Höhere Mathematik IV
Sommersemester 2026

Prof. Dr. B. Schweizer

M.Sc. Tim Schubert

Satz (Stabilität und Attraktivität lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten).
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Wir betrachten das autonome System $\partial_t y(t) = Ay(t)$ mit Ruhelage $y_0 = 0$.

- a) *Die Ruhelage y_0 ist stabil und attraktiv, wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil.*
- b) *Die Ruhelage y_0 ist stabil aber nicht attraktiv, wenn es keinen Eigenwert mit positivem Realteil gibt und bei allen Eigenwerten mit Realteil 0 jeweils geometrische und algebraische Vielfachheiten übereinstimmen.*
- c) *In allen anderen Fällen ist die Ruhelage y_0 nicht stabil und nicht attraktiv.*

Aufgabe 12.1 (Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten; 10 Punkte). Untersuchen Sie, ob für die folgenden Matrizen $A_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ (mit $i = 1, \dots, 6$) die Ruhelage $0 \in \mathbb{R}^2$ der linearen Systeme $\partial_t y(t) = A_i y(t)$ stabil und attraktiv ist:

$$\begin{aligned} A_1 &:= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}, & A_2 &:= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, & A_3 &:= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_4 &:= \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}, & A_5 &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, & A_6 &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die nachfolgende Aufgabe präsentiert eine Anleitung zur Berechnung der Fundamentalgruppe der $SO(3)$. Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist freiwillig und geht nicht in die Studienleistung mit ein.

Aufgabe 12.2 (Fundamentalgruppe der $SO(3)$). Wir betrachten die Kugel $B_\pi(0) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid |v| \leq \pi\}$. Für $0 \neq v \in B_\pi(0)$ definieren wir den Drehwinkel $\theta := |v|$, den Normalenvektor $u := \frac{v}{|v|}$ und die Rotationsmatrix

$$R_v := \begin{pmatrix} u_1^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta & u_1 u_2(1 - \cos \theta) - u_3 \sin \theta & u_1 u_3(1 - \cos \theta) + u_2 \sin \theta \\ u_1 u_2(1 - \cos \theta) + u_3 \sin \theta & u_2^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta & u_2 u_3(1 - \cos \theta) - u_1 \sin \theta \\ u_1 u_3(1 - \cos \theta) - u_2 \sin \theta & u_2 u_3(1 - \cos \theta) + u_1 \sin \theta & u_3^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Die Matrix R_v beschreibt eine Drehung um die Achse $\mathbb{R}u$ mit Drehwinkel θ . Für $v = 0$ setzen wir $R_0 := I_3$.

- a) Es seien $v, w \in B_\pi(0)$ mit $|v|, |w| < \pi$ und $R_v = R_w$. Zeigen Sie, dass $|v| = |w|$.
Folgern Sie daraus, dass $v = w$.

Anleitung: Berechnen Sie die Spur der Matrix R_v . Nutzen Sie dann aus, dass der Kosinus auf $[0, \pi)$ injektiv ist. Betrachten Sie dann den trivialen Fall $|v| = 0 = |w|$. Für den Fall $0 < |v| = |w| < \pi$ schreiben Sie $v = |v|u$ und $w = |v|z$ mit $|u| = 1 = |z|$. Betrachten Sie die Drehachsen $\mathbb{R}u$ von R_v und $\mathbb{R}z$ von R_w . Folgern Sie daraus, dass $z = u$ gilt, indem Sie $z = -u$ mit einem Widerspruchsargument ausschließen.

- b) Es seien $v, w \in B_\pi(0)$ mit $|v| = \pi = |w|$. Zeigen Sie, dass genau dann $R_v = R_w$ gilt, wenn $v = w$ oder $v = -w$ gilt.

Wir definieren die surjektive Abbildung $R: B_\pi(0) \rightarrow \text{SO}(3)$, $v \mapsto R_v$ und auf $B_\pi(0)$ die Äquivalenzrelation

$$v \sim w \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} v = w & \text{oder} \\ v, w \in \partial B_\pi(0) \text{ und } v = -w. \end{cases}$$

Wir bezeichnen mit $B_\pi(0)/\sim = \{[v] \mid v \in B_\pi(0)\}$ die Menge aller Äquivalenzklassen $[v] = \{w \in B_\pi(0) \mid v \sim w\}$. Mit Teilaufgabe a) und b) haben wir gezeigt, dass $\text{SO}(3) \cong B_\pi(0)/\sim$. Genauer induziert R einen Homöomorphismus $\mathcal{R}: \text{SO}(3) \rightarrow B_\pi(0)/\sim$. Die Abbildung $\mathcal{R}$ ist also stetig mit stetigem Inversen $\mathcal{R}^{-1}$.

Wir betrachten nun die dreidimensionale Sphäre $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x| = 1\}$ und die obere Halbkugel $H_+^3 := \{x \in S^3 \mid x_1 \geq 0\}$. Weiter definieren wir die Abbildung $\Phi: B_1(0) \rightarrow H_+^3$ durch

$$\Phi(x) = \left(\sqrt{1 - |x|^2}, x_1, x_2, x_3 \right)$$

und auf S^3 die Äquivalenzrelation $x \sim_a y :\Longleftrightarrow x = y$ oder $x = -y$.

- c) Zeigen Sie, dass Φ wohldefiniert, stetig und bijektiv mit stetigem Inversen $\Phi^{-1}: H_+^3 \rightarrow B_1(0)$ ist. Damit ist H_+^3 homöomorph zu $B_1(0)$. Mit $\Psi: B_1(0) \rightarrow B_\pi(0)$, $x \mapsto \pi x$ ist auch $B_1(0)$ homöomorph zu $B_\pi(0)$.

Wir definieren den dritten reellen projektiven Raum $\mathbb{RP}^3 := S^3/\sim_a$. Der projektive Raum $\mathbb{RP}^3$ entsteht also aus S^3 , indem man antipodale Punkte identifiziert. Jeder Punkt von $\mathbb{RP}^3$ ist also eine Äquivalenzklasse $[x] = \{x, -x\}$. Wir definieren die Abbildung $P: S^3 \rightarrow \mathbb{RP}^3$, $x \mapsto [x]$.

- d) Zeigen Sie, dass für zwei Punkte $x, y \in S^3$ genau dann $P(x) = P(y)$ gilt, wenn $x = y$ oder $x = -y$.

- e) Zeigen Sie, dass die Einschränkung $P|_{H_+^3}$ surjektiv ist.

Wir haben mit Teilaufgabe d) gezeigt, dass $P|_{H_+^3}$ genau antipodale Randpunkte von H_+^3 miteinander identifiziert. Dann folgern wir mit Teilaufgabe e), dass $P|_{H_+^3}$ einen Homöomorphismus $\mathcal{P}: H_+^3/\sim \rightarrow \mathbb{RP}^3$ induziert. Mit den Teilaufgaben a) bis e) erhalten wir somit, dass $\text{SO}(3)$ und $\mathbb{RP}^3$ homöomorph sind und deswegen die gleiche Fundamentalgruppe besitzen.

- f) Zeigen Sie, dass $\pi_1(\mathbb{RP}^3, [x_0]) \cong \mathbb{Z}_2$.

Anleitung: Betrachten Sie eine Schleife $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{RP}^3$ mit $\gamma(0) = [x_0] = \gamma(1)$. Zeigen Sie, dass es genau zwei Wege $\tau_1, \tau_2: [0, 1] \rightarrow S^3$ gibt mit $P \circ \tau_1 = \gamma = P \circ \tau_2$. Nutzen Sie dann aus, dass jede Schleife in S^3 nullhomotop ist.

Abgabe am 15.07.2026 bis 12:00 Uhr online auf Moodle.