

Übungen zur Vorlesung
Höhere Mathematik IV
Sommersemester 2026

Prof. Dr. B. Schweizer

M.Sc. Tim Schubert

Aufgabe 11.1 (Matrixdarstellung der S_n ; 10 Punkte). Wir betrachten die symmetrische Gruppe $S_n = \{\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \mid \sigma \text{ bijektiv}\}$. Ziel ist es, eine Darstellung von S_n auf $\mathbb{R}^n$ anzugeben. Geben Sie dafür eine Untergruppe $U \leq GL(n, \mathbb{R})$ und einen Gruppenisomorphismus $\varphi: S_n \rightarrow U$ an. Weisen Sie nach, dass U eine Gruppe und φ ein Gruppenisomorphismus ist.

Aufgabe 11.2 (Eigenschaften der Fundamentalgruppe; 10 Punkte). Es seien X, Y wegzusammenhängende topologische Räume mit Basispunkten $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$. Zeigen Sie, dass es einen Gruppenisomorphismus gibt, der die folgende Isomorphie liefert:

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Hinweis: Betrachten Sie die Projektionen $\text{pr}_X: X \times Y \rightarrow X$ und $\text{pr}_Y: X \times Y \rightarrow Y$ auf die Räume X und Y . Zeigen Sie, dass für zwei homotope Wege $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow X \times Y$ auch ihre Projektionen $\text{pr}_X(\alpha), \text{pr}_X(\beta)$ homotop in X und $\text{pr}_Y(\alpha), \text{pr}_Y(\beta)$ homotop in Y sind.

Aufgabe 11.3 (Lie-Gruppen; 10 Punkte). Für einen Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ sei $\mathcal{G} \subset GL(n, \mathbb{K})$ eine Gruppe, die auch eine glatte Mannigfaltigkeit ist. Es sei $I_n \in GL(n, \mathbb{K})$ die Einheitsmatrix. Wir betrachten den Tangentialraum von $\mathcal{G}$ im Punkt $e = I_n$ definiert durch

$$\mathfrak{g} := T_e \mathcal{G} := \{\partial_t \gamma(0) \mid \gamma: (-1, 1) \rightarrow \mathcal{G} \text{ ist } C^1 \text{ und } \gamma(0) = e\}.$$

Berechnen Sie für die nachfolgenden Gruppen $\mathcal{G}_i$ die Tangentialräume $\mathfrak{g}_i$:

- a) $\mathcal{G}_1 = O(3) = \{A \in GL(3, \mathbb{R}) \mid A^T A = I_3\}.$
- b) $\mathcal{G}_2 = SL(3, \mathbb{K}) = \{A \in GL(3, \mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}.$
- c) $\mathcal{G}_3 = SU(2) = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) \mid A^* A = I_2 \text{ und } \det(A) = 1\}.$

Hinweis: Man muss die Nebenbedingung für $A_t = \gamma(t)$ differenzieren, um eine Bedingung für $B = \partial_t \gamma(0)$ zu erhalten. Im Fall von a): $0 = \partial_t|_{t=0} I_3 = \partial_t|_{t=0} (A_t^T A_t) = B^T + B$. Daher ist $\mathfrak{g}_1$ der Raum der antisymmetrischen Matrizen.