

Übungen zur Vorlesung
Höhere Mathematik IV
Sommersemester 2026

Prof. Dr. B. Schweizer

M.Sc. Tim Schubert

Aufgabe 10.1 (Untergruppen der alternierenden Gruppe; 10 Punkte). Wir betrachten $V := \{\text{Id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subset \mathbb{A}_4$.

- a) Zeigen Sie, dass V ein Normalteiler von $\mathbb{A}_4$ ist.
- b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{A}_4/V$ isomorph zu $\mathbb{Z}_3$ ist. Geben Sie dafür einen Gruppenhomomorphismus $f: \mathbb{A}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_3$ an, mit $\ker(f) = V$ und $\text{im}(f) = \mathbb{Z}_3$. Nutzen Sie dann Aufgabe 9.2.

Aufgabe 10.2 (Die affine Gruppe; 10 Punkte). Für $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir die Abbildung $t_{a,b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $t_{a,b}(x) := ax + b$. Es sei $G := \{t_{a,b} \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}\}$.

- a) Zeigen Sie, dass G mit der Komposition von Abbildungen $\circ$ eine Gruppe bildet.
- b) Zeigen Sie, dass $N := \{t_{1,b} \mid b \in \mathbb{R}\}$ ein Normalteiler in G ist.
- c) Zeigen Sie, dass G/N isomorph zu $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist. Geben Sie dafür einen Gruppenhomomorphismus $f: G \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ an, mit $\ker(f) = N$ und $\text{im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nutzen Sie dann Aufgabe 9.2.

Aufgabe 10.3 (Das Zentrum einer Gruppe; 10 Punkte). Für eine Gruppe G definieren wir das Zentrum $Z(G) \subset G$ durch

$$Z(G) := \{g \in G \mid gh = hg \text{ für alle } h \in G\}.$$

- a) Zeigen Sie, dass $Z(G)$ ein Normalteiler von G ist.
- b) Bestimmen Sie das Zentrum der Diedergruppe $\mathbb{D}_4$.
- c) Bestimmen Sie das Zentrum der symmetrischen Gruppe $\mathbb{S}_3$.