

Übungen zur Vorlesung
Höhere Mathematik IV
Sommersemester 2026

Prof. Dr. B. Schweizer

M.Sc. Tim Schubert

Aufgabe 1.1 (Die eindimensionale Laplacegleichung; 10 Punkte). Sei $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Geben Sie alle Lösungen zu folgenden Gleichungen an, wobei $v, w, y, z \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen sind.

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u(a) = v, \quad u(b) = w \quad (1)$$

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u(a) = v, \quad \partial_x u(b) = z \quad (2)$$

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad \partial_x u(a) = y, \quad \partial_x u(b) = z \quad (3)$$

Prüfen Sie jeweils, ob Eindeutigkeit und das Maximumprinzip gelten.

Aufgabe 1.2 (Kompatibilität des Neumann-Problems; 10 Punkte). Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit glattem Rand und äußerem Normalenvektor n an $\partial\Omega$. Die Funktion u sei zweimal stetig differenzierbar und erfülle

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \psi \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ die Richtungsableitung in Richtung n . Zeigen Sie, dass die Funktionen f und ψ die folgende Relation erfüllen:

$$\int_{\partial\Omega} \psi \, dS = - \int_{\Omega} f \, dx.$$

Aufgabe 1.3 (Harmonische Funktionen mit Parameter; 10 Punkte). Wir betrachten $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und die Funktion $u: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) := |x|^\alpha$. Berechnen Sie alle Werte α , für die die Funktion u harmonisch ist. Geben Sie den Parameter α in Abhängigkeit von n an.