

40 Stabilität (Gew. DGL)

$$y: [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

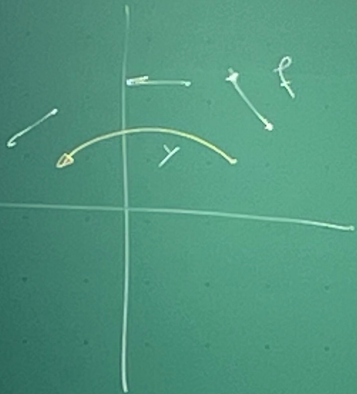
①

$$y' = f(y)$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0$$

$$\text{auch: } f = f(y, t)$$

$$\text{Hier: } f \text{ Lipschitz: } \forall y_0 \exists ! [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$$



Ruhelagen / Gleichgew. pt

x_0 mit $f(x_0) = 0$

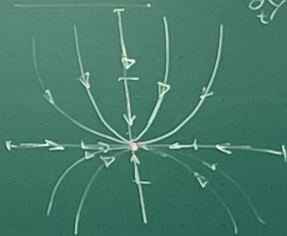
stabil, instabil
asympt. stabil

Lin. System $\partial_t y = A \cdot y$

Hier $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

(2)

Stab. Knoten



$$\partial_t y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} y$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_{0,1} e^{-t} & , & y_{0,2} e^{-2t} \end{pmatrix}$$

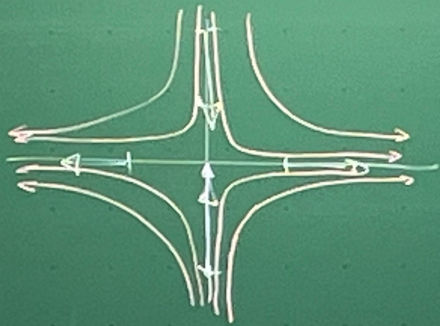
$\hookrightarrow$

asympt. stabil (alle EW: $\operatorname{Re} < 0$)

Instab. Knoten

$$y' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} y$$

3



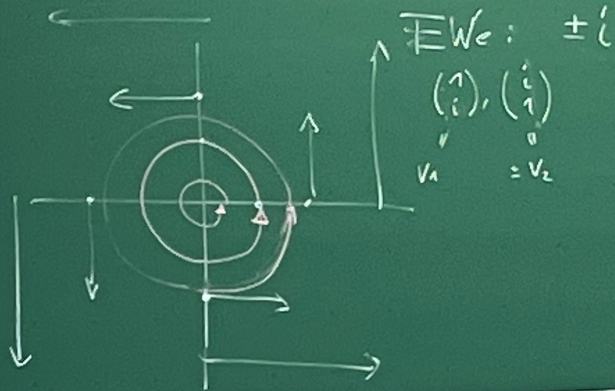
Instabil

(Ein EW: $\text{Re} > 0$)

Per. Lgs.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(4)



Lgs:
 $e_1 \cos t + e_2 \sin t$

Lgs. in $\mathbb{C}$
 $e^{it} v_1 + e^{-it} v_2$

Lgs. in $\mathbb{R}$: $\text{Re}(\quad), \text{Im}(\quad)$

Variante

$$\tilde{y}'' + 2b\tilde{y}' + \tilde{y} = 0$$

$$\partial_t \tilde{y} = \tilde{y}' \quad \uparrow \quad \partial_t y_1 = y_2 \quad (5)$$

$$y = \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{y}' \end{pmatrix}$$

$$y' = Ay$$

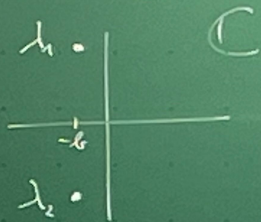
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2b \end{pmatrix}$$

$$\partial_t \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{pmatrix}$$

$$\partial_t y_2 = -2b y_2 - y_1$$

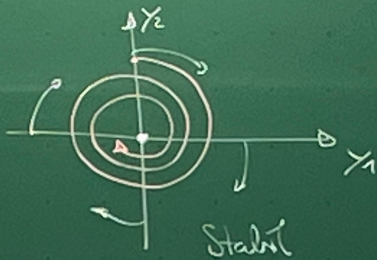
$$\text{EWe: } \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda - 2b \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2b\lambda + 1 = (\lambda + b)^2 + (1 - b^2) \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{1 - b^2} - b$$

$b > 0$ klein



$$\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = -b < 0$$

$\Rightarrow$ $\odot$ stabil



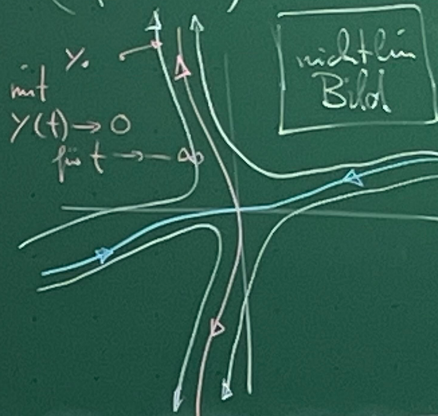
$$\text{Lsg.} \sim \operatorname{Re}, \operatorname{Im} e^{\lambda_{1,2} t}$$

$$| \cdot | \sim e^{-bt}$$

Gewiss: Für $b < 0$: instabil

Satz besagt: Verhalten von $\partial_t y = f(y)$ (7)

($f(0)=0$) ist wie das von $\partial_t y = A \cdot y$



nichtlin
Bild

$$Df(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$$

$$A = Df(0)$$

mit y_0 mit $y(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$

Ausnahme: Ein $\operatorname{Re} \lambda = 0$. (Satz sagt darüber nichts) (8)

Tatsächlich: $y' = -y^4$ in $\mathbb{R}^1 \leadsto 0$ ist stabil

Linearisierung ist $y' = 0$ Satz nicht anwendbar



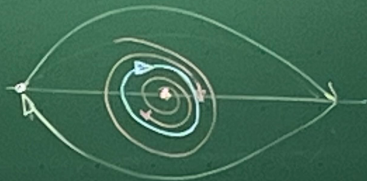
Andres System: $y' = +y^4 \leadsto$ instabil

beide dem linearisierten System

Interessant in Per. Lsg.

9

Pendel



Ruhelage: Lin. System

$$\partial_t y = Ay$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Störung: Reibung $\longrightarrow$ Ruhelage stabil

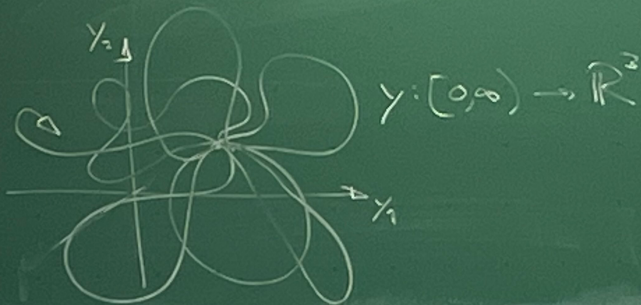
Äußere Anregung $\longrightarrow$ Ruhelage instabil $\leadsto$ Stabile periodische Lsg.

Attraktor = attraktive ω -Limesmenge

(10)

$$\omega\text{-Limesmenge} := \left\{ \gamma_\infty \in \mathbb{R}^n \mid \exists \gamma_0 \text{ \& } t_k \rightarrow \infty : \gamma(t_k) \rightarrow \gamma_\infty \right\}$$

$\gamma \text{ Lsg zu } \gamma(0) = \gamma_0$



Meist:

$$\omega\text{-Limesmenge} = \bigcup_k \{x_k\}$$

x_k ist Ruhelage

oder:

Ruhelagen $\cup$ periodische Lsg.



Poincaré-Bendixson:

In $\mathbb{R}^2$ nichts anderes

Lorentz-Attr.: In $\mathbb{R}^3$ ist sogar möglich: Attraktor mit: $\dim \in \mathbb{N}$

Ljapunov - Fkt.

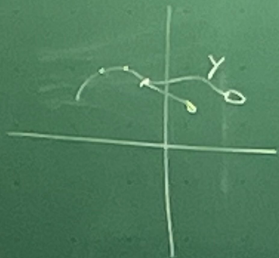
(12)

$V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Ljapunov-Fkt., falls

$$\frac{d}{dt}(V \circ \gamma)(t) \leq 0 \quad \forall t$$

entl. Lösung

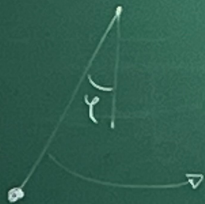
$$\nabla V(\gamma) \cdot \partial_t \gamma = \nabla V(\gamma) \cdot f(\gamma)$$



Pendel

$$\ddot{\tilde{y}} = -\sin(\tilde{y})$$

$$\text{bzw. } \partial_f \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\sin(y_1) \end{pmatrix} \quad (13)$$



Ljapunov-Fkt.: $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$V \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \frac{1}{2} |y_2|^2 + (1 - \cos y_1)$$

$$\nabla V = \begin{pmatrix} \sin y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla V \cdot f = 0$$

Wenn nun y_0 eine Ljapunov-Fkt. ex., die in y_0 ein Minimum hat $\Rightarrow y_0$ stabil