

$SU(2)$

(Gruppe & $\mathfrak{su}(2)$, $\dim=3$)

$\mathfrak{su}(2)$

(VR mit $[\cdot, \cdot]$, $\dim=3$)

$SO(3)$

$\mathfrak{so}(3)$

Überlagerung

$$\eta: SU(2) \rightarrow SO(3)$$

topologisch: $\cong S^3$

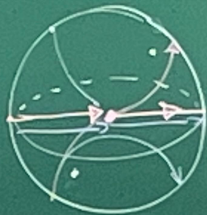
empf. (zusged.)

nicht emp. (zusged.)

$$(|a|^2 + |b|^2 = 1)$$

①

$$SO(3) \cong \mathbb{B}_1^3(0) / \sim$$



40 Stabilität von Gleichgewichtspunkten (2)

Gegeben: $f: U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

Notation

$$\text{Gew DGL: } \begin{cases} \partial_t y(t) = f(y(t), t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

(*)

$y_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ offen, Gesucht: $\gamma: [t_0, T) \rightarrow U$, diffbar, (*) gilt

Opt: Maximales T ?

$[f(y)]$

$y \in U$

autonom

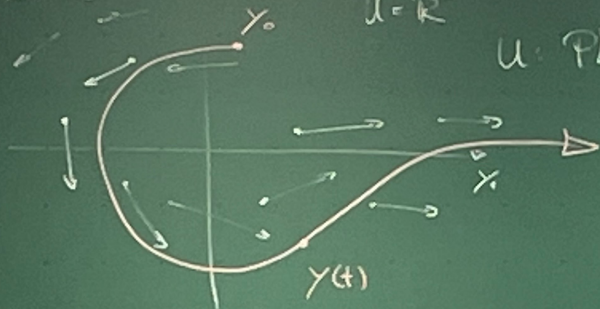
$$f = f(y)$$

(ohne expl.
t-Abh.) (3)

$$U = \mathbb{R}^2$$

U: Phasenraum

$$f(y) \in \mathbb{R}^2 \\ \forall y \in \mathbb{R}^2$$



Picard-Lindelöf: f Lipschitz-stetig Dann: $\exists T > t_0$ & Eindeutg. y auf $[t_0, T]$

$$\exists C > 0: |f(y_1, t_1) - f(y_2, t_2)| \leq C(|y_1 - y_2| + |t_1 - t_2|) \quad \forall y_1, y_2, t_1, t_2$$

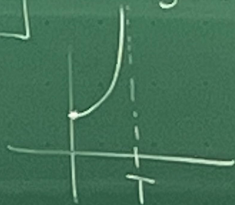
Kommentare in Beispielen

(4)

① Evtl. T "klein".

$$y' = y^2$$

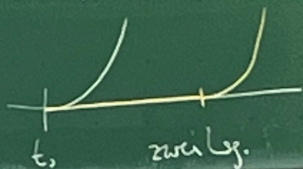
Log. wie $\frac{1}{T-t}$



② f nicht Lipsch. $\Rightarrow$ Log. evtl.
(stetig) nicht eind.

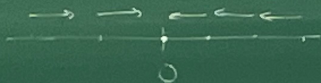
$$y' = \sqrt{y}$$

$y_0 = 0$ Log. wie t^2



③ f nicht stetig $\Rightarrow$ Gek. keine Lsg

$$f(y) = \begin{cases} -1 & y > 0 \\ +1 & y \leq 0 \end{cases}$$



⑤

Positive Resultate

• Peano: f st. $\Rightarrow \boxed{\exists T \ \& \ Lsg.}$

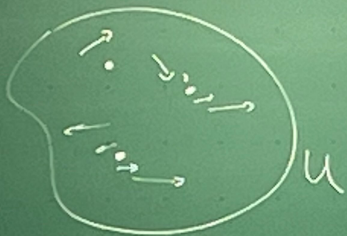
(kurz End.)

• f global Lipschitz und $U = \mathbb{R}^n$: $\boxed{T = \infty}$

Ab jetzt: Autonome Gl., $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$

(6)

$$U \subset \mathbb{R}^n$$



$$\{y \in U \mid f(y) = 0\} =: N$$

heißen Gleichgewichtspkte
(Ruhelagen)

(Lsg von $y' = f(y)$ mit $y_0 \in N$ ist $y(t) = y_0 \forall t$)

Pendel

Jetzt:

$$\ddot{\gamma} = -\sin \gamma$$

Phasenraum?



$$m \ddot{\gamma} = - \underbrace{\frac{mg}{l} \sin \gamma}_{\text{"Kraft"}}$$

Drehimpuls-
änderung

Drehmoment

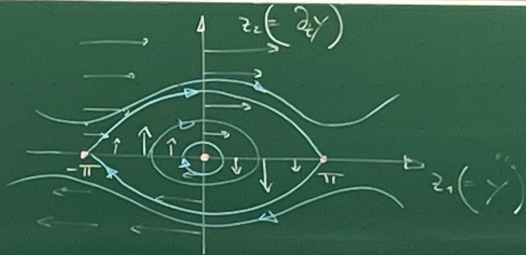
$$\partial_t \begin{pmatrix} \gamma \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ -\sin \gamma \end{pmatrix}$$

(7)

Also, mit $z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \partial_t y(t) \end{pmatrix}$

$$\partial_t \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ -\sin z_1 \end{pmatrix}$$

$$\partial_t z = f(z)$$



• Gleichgew. pte
 $\Leftarrow$ Log.

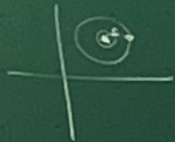
(8)

Welche Gleichgewichte sind stabil?

(3)

Def: $z \in N$ heißt

stabil, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_0 \in B_\delta(z):$



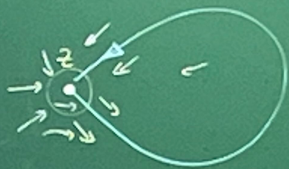
Lsg $y(\cdot)$ erfüllt $y(t) \in B_\varepsilon(z) \forall t \geq t_0$

instabil, falls nicht stabil
asymptotisch stabil, falls:

$\left\{ \begin{array}{l} z \text{ ist stabil und:} \\ \exists \delta > 0 \forall x_0 \in B_\delta(z) \end{array} \right.$

$y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} z$

Bsp:



z stabil? $\rightarrow$ NEIN

(10)

Satz (Stabilität von Gleichgewichten)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $z_0 \in U$ mit $f(z_0) = 0$

$f \in C^1$ Dann gilt:

- Falls alle EW's von $A := Df(z_0)$
 $\in \mathbb{R}^{n \times n}$
 negativen Realteil haben:
 z_0 asympt. stabil

- Falls A einen EW λ mit $\operatorname{Re} \lambda > 0$
 hat:
 z_0 instabil.

Bsp: Pendel

$$f(z) = \begin{pmatrix} z_2 \\ -\sin z_1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Punkt $z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Charakt. Polynom:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ +1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

EW's: $\lambda_{1,2} = \pm i$

$$\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = 0$$

Bem: Bei $\operatorname{Re} \lambda = 0$: Alles ist möglich

(12)

Bei $z_0 = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$: $Df_1(z_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} -\cos \pi &= 1 \\ \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} &= \lambda^2 - 1 \end{aligned}$$

Satz $\Rightarrow z_0$ instabil

$$\lambda_{1,2} = \pm 1$$

Bild:

O.E.: $z_0 = 0$

Idee: Gl. $y' = f(y)$ (13)

Lsg. wie
Lsg. von

$$z' = Df(z_0) \cdot z$$

$z_0 = 0$

(*)

$$z' = A \cdot z$$

A hat EV v : $Av = \lambda v$

Lsg von (*) zu $z(0) = \varepsilon v$

ist:

$$z(t) = \varepsilon v e^{\lambda t}$$

Test: $\partial_t(\varepsilon v e^{\lambda t}) = \lambda \varepsilon v e^{\lambda t}, \quad A(\varepsilon v e^{\lambda t}) = \varepsilon e^{\lambda t} \lambda v$

