

Wiederholung: $(G, *)$

$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_5, D_n, S_n, \dots$

Lie-Gruppen $\rightarrow O(n), GL(n), \dots$

Freie Gruppe

$$H \leq G$$

Untergr.

$$H \trianglelefteq G$$

Normalteiler

$$\hookrightarrow G/H \quad \text{Quot. gr.} \quad \left(= \{gH \mid g \in G\} \right)$$

Gruppenhomomorph. $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$

$$g_1 H * g_2 H = g_1 g_2 H$$

Darstellungen: $\varphi: G \rightarrow GL(V)$

Fundamentalgr. : $\pi_1(M)$
Gruppe der Wege

Lie - Gruppen

Allgemein : G , Lie-Gruppe
: $\Leftrightarrow G$ Gruppe & diffbare Mgf.

Meist : G ist Gruppe und ②
 C^1 -Untermannigfaltigkeit
von $GL(n)$

Bsp : $O(n)$, $GL(n)$, $SO(n)$ (voll)

komplex : $U(n)$, $GL(n, \mathbb{C})$, $SU(n)$

Hier : $SU(2)$ und $SO(3)$

SU(2) heißt Spinor-Gruppe

(3)

① SU(2)

$$SU(2) = \{ A \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid A \text{ unitär, } \det A = 1 \}$$

$$= \left\{ U = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

dh: $A^* A = I_2$

$$A^* = \overline{A^T}, \quad \langle Au, v \rangle = \langle u, A^* v \rangle$$

in $\mathbb{R}$: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$1 = \det(A^* A) = |\det(A)|^2$$

Check:

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix}$$

$$\det U = |a|^2 + |b|^2 \stackrel{(4)}{=} 1$$

✓

$$U^\dagger U = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & 0 \\ 0 & |a|^2 + |b|^2 \end{pmatrix} = I_2$$

✓

Freiheiten = reelle Dimension von $SU(2)$

↑
reelle

$$a = x_0 + i x_1$$

$$b = x_2 + i x_3$$

Eine Nebenbed.: $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

~>

$\dim SU(2) = 3$

Gruppe:

$$(U \cdot V)^* (U \cdot V) = V^* \underbrace{U^* U}_{=I} V = V^* V = I$$

Also $U \cdot V \in SU(2)$

Bei Lie-Gruppen G :

Tangentenraum (reeller VR)

(6)

im Punkt e :

$T_e G$

Zunächst: Ein Vektorraum

$$\mathfrak{su}(2) := T_e(SU(2)) = \left\{ B \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid B^* = -B, \operatorname{tr} B = 0 \right\} \quad \text{Lie-Algebra von } G$$

$$\left| \det U_\varepsilon = 2 \right|_{\varepsilon=1} 1=0$$

$\varepsilon=0$
 $\frac{1}{i} B$

$$U_\varepsilon = e + \varepsilon B,$$

$$B \in T_e G$$

$$I = U_\varepsilon^* U_\varepsilon = (e + \varepsilon B)^* (e + \varepsilon B) = e + \varepsilon B^* + \varepsilon B$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$$

$$0 = B^* + B$$

$$+ \varepsilon^2 B^* B$$

Lie-Algebra-Vektorraum

⑦

Pauli-Matrizen: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
(hermitisch)

Dann: $\frac{1}{2}i\sigma_1, \frac{1}{2}i\sigma_2, \frac{1}{2}i\sigma_3$ sind Basis von $\mathfrak{su}(2)$
(anti-hermitisch)

Lie-Algebra hat auch ein Produkt:

$X, Y \in T_x G$
f Weg, $f'(0) \in T_x G$, $g^{-1} \circ f \circ g$ neuer Weg, $\frac{\partial}{\partial t} (g^{-1} \circ f \circ g)' \sim [X, Y] = XY - YX$

Vertauschungsrelationen für Basis:

(8)

$$\left[\frac{1}{2} i \sigma_1, \frac{1}{2} i \sigma_2 \right] = -\frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\text{Ally. mit } \varepsilon_{jkl} = -\frac{i}{2} \sigma_3$$

Damit ist Algebra $su(2)$
komplett beschrieben

3D reeller VR mit $[,]$

② Analog für $SO(3)$ und $so(3)$

⑨

$$SO(3) = \{ A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid A^T A = I_3, \det A = 1 \}$$

$$so(3) = \{ B \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid B^T = -B \} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{array}{l} \Delta \text{---} \dim = 3 \\ \text{Darauf: } [,] \end{array}$$

$$0 \stackrel{\Delta}{=} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} (I + \varepsilon B)^T (I + \varepsilon B) = B^T + B \quad \begin{array}{l} \Delta \text{---} \operatorname{tr} B = 0 \text{ antisymmetrisch} \\ \sim \text{Li-Algebra } so(3) \end{array}$$

Basis von $\mathfrak{so}(3)$:

(10)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\parallel$
 E_3

$\parallel$
 E_2

$\parallel$
 E_1

"3 infinitesimale
Drehungen"

Vertauschungen: $[E_1, E_2] = -E_3$ usw.

Sogar: $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ als Algebren

Global:

$SU(2)$

anders als $SO(3)$

(11)

↗ einf. zushgd
 $\pi_1(SU(2)) = \{e\}$

↖ nicht einf. zushgd. $\pi_1(SO(3)) \neq \{e\}$

||
 $\mathbb{Z}_2$

"zweimal den nichttriv. Weg laufen
ergibt trivialen Weg"

Man weist nach: L_u ist orthogonal
(auf einem $\mathbb{R}^3$) also: $L_u \in SO(3)$

③ Die Überlagerungsabb.

Zu $U \in SU(2)$ betrachte $\mathbb{R}^3$

$$L_u: \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{su}(2), X \mapsto UXU^{-1}$$

Damit $(u \mapsto L_u)$ eine Abb.

(12)

$$\varphi: SU(2) \longrightarrow SO(3)$$

Aber: φ nicht bijektiv, $\ker(\varphi) \neq \{e\}$

φ ist Gruppenhomomorph.

$$e = I_2$$

Es gilt: $\ker(\varphi) = \{I_2, -I_2\}$

Damit: φ liefert eine
zweifache Überlagerung von $SO(3)$