

# Statt Wiederholung

(1)

$$G = \mathbb{Z}$$

$$N := 2\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$$

Quotientengruppe  $G/N \cong \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

Warnung: Insofern, irgendwie  $\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$

Aber:  $(3, 1) + (5, 1) \neq (8, 0)$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

Jetzt noch 3 Gruppen: Freie Gruppe, Fundamentalgruppe, (2)

Lie-Gruppe  $SU(2)$

Beispiel Freie Gruppe

$\mathcal{F}_X := \{ \text{endliche Symbolketten aus Erzeugern} \}$

Bsp 1: Ein Erzeuger:  $a$  Elemente sind:  $e, a, a^2, a^3, \dots$   
(wie  $\mathbb{Z}$ )  $a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, \dots$

Reduktion (wegen Assoziativität):

(3)

$$a^3 \cdot a^6 = a^9$$

$$a^3 \cdot a^{-6} = a \cdot a \cdot a \cdot \underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a^{-1}}_{=1} \cdot \underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a^{-1}}_{=1} \cdot \underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a^{-1}}_{=1} = a^{-3}$$

Operation wie in  $\mathbb{Z}$

Freie Gruppe mit einem Erzeuger  $\cong \mathbb{Z}$

Bsp 2 Zwei Erzeuger:  $a, b$

(4)

$$a^{-7}, b^5, a^3 \in \mathcal{G}, \text{ dann auch: } a^3 b^5 \in \mathcal{G}$$

$$a^{-5} b^7 \in \mathcal{G}$$

$$\text{und auch: } b^{-2} a^3 b^5 \in \mathcal{G}$$

$$\mathcal{G} = \left\{ a^{n_1} b^{n_2} a^{n_3} \dots a^{n_k} \mid k \in \mathbb{N}, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{Operation klar: } (a^5 b^{-3} a^{-4}) (a^4 b^1 a^{-7}) = a^5 b^{-2} a^{-7}$$

# Fundamentalgruppe

(5)

Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit

(

lokal wie ein  $\mathbb{R}^m$

$$\forall x \in M \exists \varepsilon > 0$$

$$B_\varepsilon(x) \cap M \cong U \subset \mathbb{R}^m$$

Bsp:  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$



Karte,  
lokal wie  $\mathbb{R}^2$

es gibt einen  
Isomorphismus  
(Diffeomorph./Homeomorph.)

$\uparrow$   
 $\uparrow$   
 $U$  offene  
Teilmenge

Denke an :

$$S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$$

(6)

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$$

$$\mathbb{T}^2 = \text{[Diagram of a square with a red vertical line and a purple horizontal line, and a diagonal slash] } = [0, 1]^2 / \sim$$



$\sim$  : rechter Rand = linker Rand

und: oben  $\rightarrow$  = unten  $\rightarrow$

Andere Bsp:  $SO(2) \cong S^1 \cong \{e^{i\varphi} \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$  ⑦

$$\cong \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \mid \varphi \in \mathbb{R} \right\}$$

$SO(n)$ ,  $O(n)$ ,  $GL(n)$ , ...

Info:  
(alles Lie-  
Gruppen)



Wege

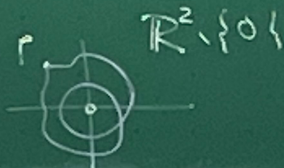
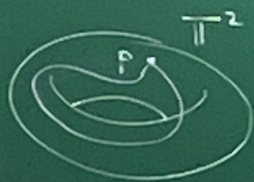
Halte Punkt  $p \in M$  fest.

9

Betrachte

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow M \quad (\text{stetig})$$

$$\text{mit } \gamma(0) = p = \gamma(1)$$



$$\pi_1(M) := \{\gamma\} / \sim$$

## Zwei Fragen

10

- Was ist  $\sim$  (Def:  $\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \dots$ )
- Was ist  $*$  auf  $\pi_1(M)$ ?

Seien  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  Wege wie oben. Ziel: Definiere  $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$

$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$



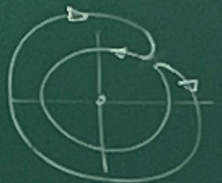
$$\pi_1(M) = \{ \gamma: [0,1] \rightarrow M \mid \gamma(0) = p = \gamma(1), \gamma \text{ st.} \} / \sim \quad (12)$$

$$= \{ [\gamma] \mid \gamma \text{ wie oben} \}$$

$$[\gamma] = \{ \hat{\gamma} \mid \text{mit } \hat{\gamma} \sim \gamma \}$$

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$$


 $\approx 1$ 

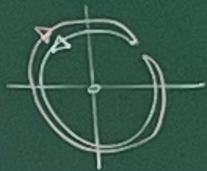
 $\approx 3$ 

 $\approx 0$

Inverses Element der Gruppe.

13

Rückwärts gehen

Zu  $\gamma$  ist  $\gamma^{-1}: [0,1] \rightarrow M, t \mapsto \gamma(1-t)$

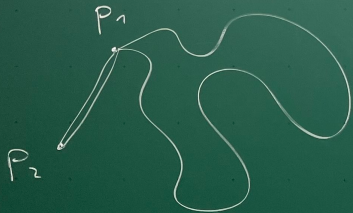


$$\gamma * \gamma^{-1} \stackrel{?}{=} e$$

$$e: [0,1] \rightarrow M, t \mapsto p$$

Bem. Wahl von  $p$  irrelevant!

(14')



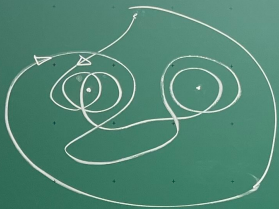
Bsp:

$$\pi_1(\mathbb{R}^n) = \{e\}$$

trivial

$\Leftrightarrow \mathbb{R}^n$  ist einfach zusammenh.





(?)

=

$$a^{-1} b^2 a^3$$

16

$$\pi_1(M) \neq \text{trivial}$$

$$[X, Y] = X \cdot Y - Y \cdot X$$

cellular

