

Wiederholung Def. Normalteiler:

Eine Untergruppe $N \leq G$ heißt **Normalteiler**, wenn

$$gN = Ng \quad \forall g \in G.$$

Wir schreiben dann $N \trianglelefteq G$. Äquivalent dazu ist auch

$$gNg^{-1} = N \quad \forall g \in G$$

Def. Quotientengruppe:

Sei $N \trianglelefteq G$. Auf der Menge der Nebenklassen $G/N := \{gN \mid g \in G\}$ definieren wir die Verknüpfung $\circ : G/N \times G/N \rightarrow G/N$ durch

$$(gN) \circ (hN) := (gh)N. \quad (*)$$

Satz:

Sei $N \trianglelefteq G$. Die Verknüpfung aus $(*)$ ist wohldefiniert und macht G/N zu einer Gruppe.

Bew.:

Wohldef.: Seien $gN = g'N$ und $hN = h'N$. Dann $g^{-1}g' \in N$ und $h^{-1}h' \in N$. Wir müssen zeigen, dass $(gh)N = (g'h')N$, also $(gh)^{-1}g'h' \in N$ gilt. Dann folgt, dass N ein Normalteiler ist:

$$(gh)^{-1}g'h' = h^{-1}g^{-1}g'h' = \underbrace{(h^{-1}h')}_{\in N} \underbrace{(h')^{-1}g^{-1}g'h'}_{\in N} \in N.$$

Dabei haben wir genutzt, dass $g^{-1}g' \in N$ und N Normalteiler ist.

Neutrale Element: $eN = N \in G/N$

Inverses Element: $g^{-1}N \in G/N$ □

Bsp.:

Betrachte $(\mathbb{Z}, +)$ mit Normalteiler $4\mathbb{Z} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$

Die Nebenklassen von $4\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ sind

$$4\mathbb{Z} + 0 = 4\mathbb{Z}, \quad 4\mathbb{Z} + 1 = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$

$$4\mathbb{Z} + 2 = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\} \quad \text{und}$$

$$4\mathbb{Z} + 3 = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\}$$

2.

Es gilt $\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z} \cup 4\mathbb{Z}+1 \cup 4\mathbb{Z}+2 \cup 4\mathbb{Z}+3$ und somit

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{4\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}+1, 4\mathbb{Z}+2, 4\mathbb{Z}+3\}.$$

Die Verknüpfungstafel ist gegeben durch

$\oplus$	$4\mathbb{Z}$	$4\mathbb{Z}+1$	$4\mathbb{Z}+2$	$4\mathbb{Z}+3$
$4\mathbb{Z}$	$4\mathbb{Z}$	$4\mathbb{Z}+1$	$4\mathbb{Z}+2$	$4\mathbb{Z}+3$
$4\mathbb{Z}+1$	$4\mathbb{Z}+1$	$4\mathbb{Z}+2$	$4\mathbb{Z}+3$	$4\mathbb{Z}$
$4\mathbb{Z}+2$	$4\mathbb{Z}+2$	$4\mathbb{Z}+3$	$4\mathbb{Z}$	$4\mathbb{Z}+1$
$4\mathbb{Z}+3$	$4\mathbb{Z}+3$	$4\mathbb{Z}$	$4\mathbb{Z}+1$	$4\mathbb{Z}+2$

mit $\oplus : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $(4\mathbb{Z}+a, 4\mathbb{Z}+b) \mapsto 4\mathbb{Z}+(a+b)$

Betrachte Verknüpfungstafel von $\mathbb{Z}_4$:

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Dann gilt $\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ mit

$$4\mathbb{Z} \mapsto 0,$$

$$4\mathbb{Z}+1 \mapsto 1,$$

$$4\mathbb{Z}+2 \mapsto 2,$$

$$4\mathbb{Z}+3 \mapsto 3.$$

Satz:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $\square$

Def. freie Gruppe

Sei X eine Menge aus Symbolen. Die freie Gruppe FX besteht aus allen reduzierten Wörtern in den Symbolen aus X und ihren formalen Inversen. Die Gruppenverknüpfung ist die Konkatenation von Wörtern mit anschließender Kürzung, z.B. $xx^{-1} = e$ und $x^{-1}x = e$.

Eine Gruppe G heißt frei über einer Teilmenge $S \subset G$, wenn sich jedes $g \in G$ auf genau eine Weise schreiben lässt als $g = s_1^{e_1} s_2^{e_2} \dots s_n^{e_n}$ mit $s_1, \dots, s_n \in S$, wobei $s_i \neq s_{i+1}$ für alle i und $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Man nennt $s_1^{e_1} \dots s_n^{e_n}$ ein reduziertes Wort über S .

Bsp.:

1. Sei $X = \{a, b\}$. Dann gilt $a^2 b a^{-3} b^4, b^{-4} a^2 b \in F(X)$
und $(a^2 b^{-3} b^4) \cdot (b^{-4} a^2 b) = a^2 b^{-7} a^2 b \in F(X)$

2. Die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist frei über $S = \{1\}$.

3. Die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}_n$ ist keine freie Gruppe.

Es gilt z.B. $\underbrace{n-1 + \dots + n-1}_{(n+1)\text{-mal}} = n-1$.

Damit ist $n-1$ nicht eindeutig darstellbar.

Der Satz von Cayley:

Jede endliche Gruppe $(G, \cdot)$ mit $|G| = n \in \mathbb{N}$ ist isomorph zu einer Untergruppe der S_n .

Bew.:

1. Wir fixieren eine Bijektion $\Phi: G \rightarrow \{1, \dots, n\}$.

2. Wir bezeichnen mit $\Sigma(G)$ die Menge aller Bijektionen $G \rightarrow G$.
Dann ist $(\Sigma(G), \circ)$ eine Gruppe, die isomorph zu S_n ist.

Man wählt z.B. $\Psi: \Sigma(G) \rightarrow S_n, f \mapsto \Phi \circ f \circ \Phi^{-1}$.

3. Für jedes $g \in G$ betrachten wir die Linksmultiplikation

$$L_g: G \rightarrow G, x \mapsto gx,$$

und zeigen, dass L_g bijektiv ist.

Injektiv: Seien $x, y \in G$ mit $L_g(x) = L_g(y)$. Dann gilt:

$$x = g^{-1} g x = g^{-1} L_g(x) = g^{-1} L_g(y) = g^{-1} g y = y$$

Surjektiv: Für jedes $x \in G$ gilt $L_g(g^{-1} x) = g g^{-1} x = x$

Damit gilt $L_g \in \Sigma(G)$ für jedes $g \in G$.

4. Wir zeigen, dass $L: G \rightarrow \Sigma(G), g \mapsto L_g$ ein injektiver

SKINNEV

Gruppenhomomorphismus ist. Es seien $g, h \in G$ und $x \in G$:

$$L(gh)(x) = Lgh(x) = (gh)x = g(hx) = g L_h(x) = L_g(L_h(x))$$

4.

$$= (Lg \circ Lh)(x) = (L(g \circ L(h)))(x).$$

Injektiv: Sei $g \in \ker(L)$, dann $L(g) = \text{id}_{\Sigma(G)}$ und für alle $x \in G$:

$$gx = L(g)(x) = \text{id}_{\Sigma(G)}(x) = x \Rightarrow g = e.$$

5. Mit Aufgabe 9.2 erhalten wir dann

$$G \cong G/\ker(L) \cong L(G) \leq \Sigma(G) \cong S_n.$$

(*) Weiteres Bsp. zur Quotientengruppe:

Wir betrachten $(\mathbb{Z}, +) \trianglelefteq (\mathbb{R}, +)$ und bestimmen $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Für $x \in \mathbb{R}$ ist die Nebenklasse

$$x + \mathbb{Z} = \{x + n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ sind also genau dann in der selben Nebenklasse, wenn $x - y \in \mathbb{Z}$.

Intuition: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \hat{=} [0, 1)$.

Nutze Aufgabe 9.2: Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}(1)$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$.

Dann ist f ein Gruppenhomomorphismus ✓, mit $\ker(f) = \mathbb{Z}$

und $f(\mathbb{R}) = \text{im}(f) = \mathcal{U}(1)$. Dann gilt

$$\mathbb{R}/\ker(f) = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathcal{U}(1).$$

Vorstellung: Zahlengerade wird zu einem Kreis zusammengeklebt, s.d. alle Punkte x und $x+1$, also insb. 0 und 1 identifiziert werden.