

Gruppe: $(G, *)$

①

$\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$ mit "+" als "+ modulo n"

$S_n := \{\text{Permutationen von } (1, 2, \dots, n)\}$

$A_n := \{\text{gerade Perm.}\}$

$GL(n) := \{\text{inv.baren } n \times n\text{-Matrizen}\}$ mit " $\cdot$ " Matrixmultipl.

(3)

Def: Sei $(G, *)$ eine Gruppe, $H \subset G$

Dann heißt H Untergruppe, wenn $(H, *)$ eine Gruppe ist.

$$H \leq G$$

Kriterium: Wenn gilt: $\forall a, b \in H: ab^{-1} \in H$

$H \neq \emptyset$ Dann $H \leq G$.

Bew:

$$e = aa^{-1} \in H \quad \checkmark$$

$$ea^{-1} = a^{-1} \in H \quad \checkmark$$

$$ab = a(b^{-1})^{-1} \in H \quad \checkmark$$

Bsp: $\{0, 2\} \leq \mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$

(4)

//

$2\mathbb{Z}_2$

//

$\mathbb{Z}_2$

$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} 0+0 &= 0 \\ 0+2 &= 2+0 = 2 \\ 2+2 &= 0 \end{aligned}$$

$\mathbb{Z}_2 \leq \mathbb{D}_n$
(Spiegelungen)

$O(n) \leq GL(n)$

$A_n \leq S_n$

$\mathbb{D}_n \leq S_n$

$\mathbb{Z}_n \leq \mathbb{D}_n$
(Rotationen)

Def: Sei $H \leq G$. Dann heißen die Teilmengen (5)

$g * H$ mit $g \in G$ die (Links-) Nebenklassen von H .

Bsp: $G := S_3 = \{ \underbrace{(\overline{123})}_=e, (\overline{132}), (\overline{213}), (\overline{231}), (\overline{312}), (\overline{321}) \}$

$$|S_3| = 6 = 3!$$

$$H = \{ e, (12) = (\overline{213}) \}$$

$$g := (13) = (\overline{321}) \quad g * H = \{ (13) * e = (13) = (\overline{321}), (13) * (12) = (\overline{231}) \}$$

Alle Linksnebenklassen von H :

$$(12)*H = e*H = \{e, (\overline{213})\}$$

$$(13)*H = \left\{ (\overline{321}), (\overline{231}) \right\}$$

$$\parallel$$
$$(\overline{231})*H$$

$$(13)*(12) = (\overline{231})$$

$$(23)*H = \left\{ (\overline{132}), (\overline{312}) \right\}$$

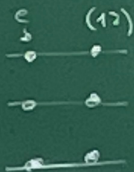
Satz: Es gilt: Linksnebenklassen zerlegen die Gruppe. (7)

$g_1 * H$ und $g_2 * H$ sind $\begin{cases} \text{entweder identisch} \\ \text{oder disjunkt} \end{cases}$

Jedes $g \in G$ ist in einer Linksnbklasse (in $g * H$)

Satz von Lagrange ($[G:H] = \# \text{ Linksnebenklassen}$)

Bild



$$|G| = |H| \cdot [G:H]$$

Insbesondere: $|H|$ ist ein Teiler von $|G|$

②

Def: Eine Untergruppe H heißt Normalteiler von G , falls

$$g * H = H * g \quad \forall g \in G$$

Dann: $H \trianglelefteq G$

Bsp: • $A_n \trianglelefteq S_n$

• $2\mathbb{Z}_2 \trianglelefteq \mathbb{Z}_4$

(hier, denn $\mathbb{Z}_4$ kommutativ)

• $\{e, r, r * r, r * r * r\} \trianglelefteq D_4$

jede UG ist Normalteiler

Bsp. für $H \leq G$, aber H kein Normalteiler.

⑨

$$\{e, (1\ 2)\} =: H \leq G = S_3$$

$$H * (1\ 3) = \left\{ \overline{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}} \right\} \neq (1\ 3) * H$$

$$\text{NR: } (1\ 2) * (1\ 3) = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}$$

Vorname: $H := \{e, s\} \leq \mathbb{D}_4$

$$r = \begin{smallmatrix} & 3 & & \\ & \square & & \\ 6 & & 2 & \\ & 1 & & \end{smallmatrix}$$

$$s = \begin{smallmatrix} & 3 & & 4 \\ & \square & & \\ 2 & & 1 & \\ & & & \end{smallmatrix}$$

Auch Normalteiler?

ja : 5

nein : 5

$$r * H = \{r, \begin{smallmatrix} & 4 & & \\ & \square & & \\ 3 & & 2 & \\ & & & \end{smallmatrix}\}$$

$$H * r = \{r, \begin{smallmatrix} & 2 & & 3 \\ & \square & & \\ 1 & & 4 & \\ & & & \end{smallmatrix}\}$$

Kein Normalteiler!

Def: Eine Gruppe G heißt einfach,
wenn $\{e\}$ und G die einzigen Normalteiler
sind.

Bsp: S_n nicht einfach $\forall n$

Aber: A_n schon (für $n \geq 5$)

Wichtiger Satz der Gruppentheorie

Man kennt alle endlichen einfachen Gruppen
(bis auf Isomorphismen)

1) $\mathbb{Z}_p$ mit p prim

2) A_n mit $n \geq 5$

3) Lie-Typ

4) 26 sporadische Gruppen

Später: $N \trianglelefteq G \Rightarrow G/N = \{\text{Nebenklassen}\}$
ist Gruppe.

(12)

Def: Eine Abb. $\varphi: (G, *) \longrightarrow (H, \cdot)$

heißt Gruppenhomomorphismus, falls

$$\varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G$$

Falls φ zusätzlich bijektiv ist: Gruppenisomorphismus. Dann: $G \cong H$.

Bsp: $D_3 \cong S_3$.

13

So wie $G = \{a, b\}$ mit $a * b = b = b * a = a * a$
und $b * b = a$

$$G \cong \mathbb{Z}_2$$

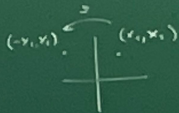
mit $\varphi: G \rightarrow \mathbb{Z}_2$

$$\begin{array}{lcl} a & \mapsto & 0 \\ b & \mapsto & 1 \end{array}$$

Def: Sei $(G, *)$ eine Gruppe.

14

Dann heißt ein Gruppenhomomorph. $\varphi: G \rightarrow GL(n)$
eine Darstellung der Gruppe.



Bsp: D_4 als Teilmenge von $GL(2)$

$$\left\{ \begin{matrix} \overset{e}{\underset{1}{\parallel}} & \overset{s}{\underset{2}{\parallel}} & \overset{r}{\underset{4}{\parallel}} & \overset{r^2}{\underset{4}{\parallel}} & \overset{r^3}{\underset{4}{\parallel}} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{Satz} \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$