

Gruppen

①

Def:

G eine Menge, darauf eine

$$* : G \times G \rightarrow G$$

$$(a, b) \mapsto a * b$$

1) $\exists$ neutr. El. e

2) $\forall a \exists$ Inverses a^{-1}

3) Assoziativ

Bem (Redundanz des Axioms)

(2)

Sei G mit assoziativer Operation $*$.

1') $\exists$ Linksneutrales El. e_L $(\forall a \in G: e_L * a = a)$

2') $\forall a \exists$ Linksinverse a_L^{-1} $(\forall a: a_L^{-1} * a = e_L)$

Dann ist G schon eine Gruppe mit $e := e_L$ & $a^{-1} = a_L^{-1}$

Bew: (1) "Links Kürzen"

(3)

Beh1 $a * b = a * c \Rightarrow b = c$

Bew1: Multipl. mit a_L^{-1} :

$$a_L^{-1} * a * b = a_L^{-1} * a * c$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ e_L * b \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ b \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ e_L * c \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ c \end{array}$$

□

(2) "Rechtsneutral"

(4)

Beh 2: $\forall a: a * e_L = a \quad (2)$

Bew 2: Zeige statt (2) lieber

$$\underbrace{a_L^{-1} * (a * e_L)}_{=} = \underbrace{a_L^{-1} * a}_{= e_L}$$

$$e_L = e_L * e_L$$

Das gilt. (1) $\Rightarrow$ (2).

(3) Beh 3: $\forall a: a * a_L^{-1} = e_L$ (3)

Bew 3: Zeige statt (3) lieber

$$a_L^{-1} * (a * a_L^{-1}) = a_L^{-1} * e_L$$

"

" (2)

$$e_L * a_L^{-1}$$

$$a_L^{-1}$$

$$a_L^{-1}$$

Das stimmt

(1) $\rightarrow$

(3)

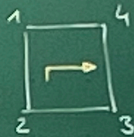
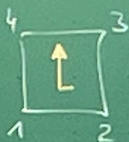


Th 7: Viele Beispiele

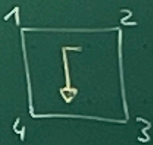
Symmetriegruppen geom.
Objekte

(5)

D_4



r



s

Diese Rotationen
und Spiegelungen
bilden eine Gruppe: D_4

$$D_4 = \left\{ e, r, r \circ r, r \circ r \circ r, s, r \circ s, r \circ r \circ s, r \circ r \circ r \circ s \right\}$$

$\uparrow$
nicht verändert

Gruppenoperation bestimmt durch:

$$(r * (r * r) := r * r * r) \quad \checkmark \quad (7)$$

$$r * r * r * r = e$$

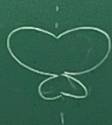
$$s * s = e$$

$$s * r = r * r * r * s$$



Dann
z.B.: $s * (r * r) \stackrel{(A)}{=} (s * r) * r = r^3 * s * r = r^3 * r^3 * s = r^4 * r^2 * s = r * r * s$

Bem: Geometrische Objekte besitzen immer eine Symmetriegruppe (8)



Sym-Gr:

$$G = \{e, s\} \text{ mit } s * s = e$$

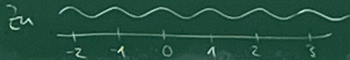
$$G \cong \mathbb{Z}_2$$

(später)

$$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$$

rechne + modulo 2

zu $\square$: D_4



(1-periodische Fkt.)

$$G = (\mathbb{Z}, +)$$

Bei Symmetrie: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$
(Spiegel-)

Häufige Gruppen in Zeitvariablen

⑨

→ beliebige Shifts erlaubt

Gruppe Daten: $(\mathbb{R}, +)$

$$t \leadsto t + \tau$$

"Algebraische" Beispiele

10

$$\mathbb{Z}_n := \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \text{ mit } + \text{ modulo } n$$

D_n erzeugt durch r und s , $r^n = e, s \times s = e$.
Ordnung := #Elemente = n

Ordnung: $2n$

Symmetrische Gruppe = Permutationsgruppe

11

$$S_n := \{ f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \text{ bijektiv} \} \quad \text{mit } * = \circ \text{ "Verketting"}$$

Verschiedene Notationen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$$

$$\text{d.h.} \quad \begin{aligned} f(1) &= 3 \\ f(2) &= 4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Abgekürzt:

$$(214) \in S_4 \quad \text{d.h.} \quad \begin{aligned} f(2) &= 1 \\ f(1) &= 4 \end{aligned}$$

oder (23)

$$\begin{aligned} f(2) &= 3 \\ f(3) &= 2 \\ f(1) &= 1 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad (1342)$$

$$\begin{aligned} f(4) &= 2 \\ f(3) &= 3 \end{aligned}$$

Warnung: Nicht jedes f kann als eine solche Klammer
geschrieben werden

(12)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2) * (3\ 4)$$

↑ eine solche Klammer
Vertauschung

Beim: Jedes $a \in S_n$
kann als Produkt
von (mehreren) Vertauschungen
gesch. werden.

Ordnung von S_n : $n!$

Bem: $D_n \subset S_n$ mit derselben Operation $*$

(13)

$$D_3: \begin{array}{c} 3 \\ \triangle \\ 1 \quad 2 \end{array} \{e, r, r^2, s, rs, r^2s\} =: D_3$$

Ordnung: $2 \cdot n = 6$

$$s\left(\begin{array}{c} 3 \\ \triangle \\ 1 \quad 2 \end{array}\right) = \begin{array}{c} 3 \\ \triangle \\ 2 \quad 1 \end{array}$$

$$D_3 = S_3$$

$$D_4 \neq S_4$$

$$2 \cdot 4 = 8$$

$$4! = 24$$

Anders bei D_4 : $\begin{array}{c} 4 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \end{array}$ nicht erlaubt

Alternierende Gruppe

$$A_n := \{ \varphi \in S_n \mid \varphi \text{ kann als eine gerade Anzahl von Vertauschungen geschrieben werden} \}$$

Gruppen mit endl. vielen Elementen heißen endliche Gruppe.

Bsp.: Unendl. Gruppen:

$$(\mathbb{Z}, +)$$

$$(\mathbb{R}, +)$$

Matrix-Gruppen

(15)

$$G \subset (\mathbb{R}^{n \times n}, \cdot)$$

$$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

(Bem. $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$)

Größte Gruppe darin:

$$GL(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \text{ invertierbar}\}$$

Andere Matrix-Gruppen:

$$O(n), \quad SO(n)$$

$\uparrow$ det = 1 & orth.

$$\left(= \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\} \right)$$

$n \geq 2$: nicht kommutativ

Def Sei $(G, *)$ eine Gruppe

(16)

$H \subset G$ heißt Untergruppe von G ,

falls $(H, *)$ eine Gruppe ist.

Dann: " $H \leq G$ "

Bem: Sei $H \subset G$, $(G, *)$ eine Gruppe

- Falls
- (i) $e \in H$
 - (ii) $\forall a \in H \quad a^{-1} \in H$
 - (iii) $\forall a, b \in H \quad a * b \in H$

Dann ist H eine Ugr.

Dannit

z.B.:

$$\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\mathbb{Z}_3 \cong \{0, 2, 4\}$$

$$\mathbb{Z}_3 \leq \mathbb{Z}_6$$

$$\text{auch } \mathbb{Z}_2 \leq \mathbb{Z}_6$$

$$\parallel^? \\ \{0, 3\}$$

$$\mathbb{D}_n \leq \mathbb{S}_n$$

Allg.: $1 < m < n, \frac{n}{m} \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \mathbb{Z}_m \leq \mathbb{Z}_n$$

$$\mathbb{A}_n \leq \mathbb{S}_n$$

↳ später

$\mathbb{Z}_n$ nicht einfach