

38 Distributionen

(1)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen

$$\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$$

$$\mathcal{D}'(\Omega) := \{ \lambda : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{lin., Abschätzung} \}$$

zu $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$) bilde $\langle f \rangle : \varphi \mapsto \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$

Dann:
 $1 \leq j \leq n$
($f \in L^1$)

$$\partial_j f = ??$$

$$\partial_j \langle f \rangle : \varphi \mapsto \langle f \rangle (-\partial_j \varphi)$$

Dirac-Folgen: $(\psi_k)_k$

$$\langle \psi_k \rangle \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \delta_0$$

dn: $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_k \varphi \longrightarrow \varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k = 1 \\ \int_{\mathbb{R}^n - B_5(0)} |\psi_k| \longrightarrow 0 \end{array} \right.$$

Ableitungsregel ist so, dass,
 falls $f \in C^1$.

$$\begin{array}{ccc}
 \partial_j \langle f \rangle & = & \langle \partial_j f \rangle \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\partial_j \langle f \rangle)(\varphi) & & \langle \partial_j f \rangle(\varphi) \\
 \parallel & & \parallel \\
 \langle f \rangle (-\partial_j \varphi) & & \int \partial_j f \cdot \varphi \\
 \parallel & & \\
 -\int f \partial_j \varphi & &
 \end{array}$$

Bsp:
 $x \in \mathbb{R}$

$$H(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

(4)

$$\partial_1 \langle H \rangle = \delta_0$$

Erinnere an: Fundamentallösung zu $-\Delta$ in $\mathbb{R}^n$

Bsp:
 $n=3$

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}$$

$$\phi(x) := \begin{cases} c \frac{1}{|x|^{n-2}} & n \geq 3 \\ -c \log|x| & n=2 \end{cases}$$

Hatten:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \phi \cdot \nabla \varphi = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (*)$$

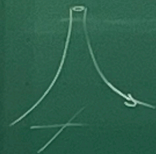
(5)

Bew: l.S. = $\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla \phi \cdot \nabla \varphi}_{\text{beschr. Integral}} + \underbrace{\int_{B_\varepsilon(0)} \nabla \phi \cdot \nabla \varphi}_{\text{Integral}}$

$$\Delta \phi = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\partial \phi}{\partial r} \cdot \nu = \varphi(0) \quad \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0}$$

klein für $\varepsilon > 0$ klein



Als Distributionen:

$$-\Delta \langle \phi \rangle = ?$$

$$\underbrace{(-\Delta \langle \phi \rangle)}_{\text{div grad}}(\varphi) = \nabla \langle \phi \rangle (\nabla \varphi)$$

$$= -\langle \phi \rangle (\Delta \varphi)$$

$$= -\int \phi(x) \Delta \varphi(x) dx = \int \nabla \phi \nabla \varphi$$

$$\Delta = \sum \partial_j^2$$
$$\lambda \in \mathcal{D}' \Rightarrow \Delta \lambda \in \mathcal{D}'$$

$$\delta_0(\varphi)$$

"

$$\varphi(0)$$

"

(6)

Ergebnis

$$-\Delta \langle \phi \rangle = \delta_0.$$

⑦

oder lax:

$$-\Delta \phi = \delta_0.$$

(das ist (*)
in anderer Formulierung)

Damit: Darstellungen von Lösungen

Ziel: Löse $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$

(8)

Beh. $u(x) := (f * \phi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \phi(x-y) dy$ ist Lsg.

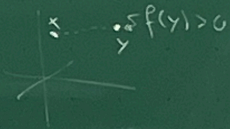
Formaler Beweis

$$\begin{aligned}
 -\Delta u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \underbrace{(-\Delta \phi(x-y))}_{\delta_x \text{ in der Variablen } y} dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \delta_x(y) dy = f(x) \quad \square
 \end{aligned}$$

Δ wirkt nur auf x

Also in 3 Dim:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} f(y) \frac{1}{|x-y|} dy$$



(9)

Richtiger Beweis: $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ beliebig

$$\underbrace{(-\Delta \langle u \rangle)}_{\text{Def. Axi.}}(\varphi) = \langle u \rangle \underbrace{(-\Delta \varphi)}_{\text{Existenz}} = \left\langle \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \phi(\cdot - y) dy \right\rangle (-\Delta \varphi)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \phi(x-y) dy \underbrace{(-\Delta \varphi(x))}_{\text{Def. m} \langle f \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y) (-\Delta \varphi)(x) dx dy \stackrel{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(y) dy \end{aligned}$$

$\langle f \rangle(\varphi)$
//

Bemerkung: Wärmeleitungsgl.

(10)

$$\text{mit } \phi(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

Dann:

$$(\partial_t - \Delta) \phi = \delta_0 \text{ in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

Führt (analog zu oben) auf: Lsg. u von $(\partial_t - \Delta)u = f$ ist gegeben durch $u(x,t) = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} f(y,s) \phi(x-y, t-s) ds dy$

39 Gruppen

11

Bsp: $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

Rechnen mit $+$ modulo n

$n=3$ $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

$$0+1=1, \quad 0+2=2$$

$$1+2=0, \quad 2+2=1$$

$$1+1=2, \quad 0+0=0$$

(12)

Def: Eine Gruppe $(G, *)$ ist eine Menge G
mit einer Operation (Abb.) $*: G \times G \rightarrow G$

Weitere Bedingungen:

- (1) Neutrales Element: $\exists e \in G: e * g = g = g * e \quad \forall g \in G$
- (2) Inverses Element: $\forall g \in G \exists g^{-1} \in G: g * g^{-1} = e = g^{-1} * g$
- (3) Assoziativ: $\forall g, h, p \in G: (g * h) * p = g * (h * p)$

(1)

Bem: Nicht gefordert, dass $g * h = h * g$

Gruppe G heißt kommutativ, falls $g * h = h * g \forall g, h$

Bem 1 Neutrales Element ist
eindeutig.

Name: "abelsche Gruppe"

Bew: Seien e und e' neutrale Elemente

$$e \underset{e' \text{ neutral}}{=} e' * e \underset{e \text{ neutral}}{=} e'$$



Bem 2: Es gibt nur ein inverses Element.

Bew: Zu g seien h und p invers

$$h = h * e = h * (g * p) = (h * g) * p = e * p = p$$

□

Bem 3: Zu g sei h rechtsinvers $g * h = e$
 und p linksinvers $p * g = e$

Dann: $h = p$

Bew:

$$\begin{array}{ccc}
 p * (g * h) & = & (p * g) * h \\
 \parallel & & \parallel \\
 p * e & & e * h \\
 \parallel & & \parallel \\
 p & & h
 \end{array}$$

□

Beispiele: $\forall n \geq 1: (\mathbb{Z}_n, +)$ ist eine Gruppe

$$\begin{array}{c}
 \text{in } \mathbb{Z} \\
 \downarrow \\
 e \hat{=} 0 \\
 \downarrow \\
 g^{-1} \hat{=} n - g
 \end{array}$$

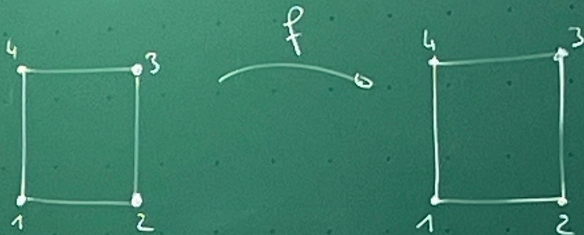
$n=1: \mathbb{Z}_1 = (\{0\}, *, 0 * 0 := 0)$ Triviale Gruppe

"Di-eder"

 D_4

Dieder

$$G := D_4 := \{ \text{rigide} \}$$



Spiegelung

$$f: (1, 2, 3, 4) \mapsto (2, 1, 4, 3)$$

90°-Drehung

$$f: (1, 2, 3, 4) \mapsto (4, 1, 2, 3)$$

