

$$35) -\Delta u = f$$

$$36) \partial_t u = \Delta u$$

$$37) \partial_t^2 u = \Delta u$$

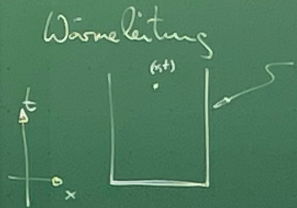
①

38 Distributionen

Nachtrag:

Alle Gl. 35 — 37: Existenz & Eindeutigkeit
(bei geeign. Anf. & Randbed.)

(2)



Parabolischer Rand:

$$(\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times (0, T)) =: T_{\text{par}}$$

Max-Prinzip:

$$u(x, t) \leq \max_{(y, s) \in T_{\text{par}}} u(y, s)$$

$$u \geq 0$$

Folgerung: $u|_{T_{\text{par}}} = 0 \Rightarrow u \leq 0$ in $\Omega \times (0, T)$ Sogar $(v := -u)$: $u \equiv 0$

Liefert: Lösungen von
sind eindeutig bestimmt.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u = \Delta u + f \\ u|_{t=0} = u_0 \\ u|_{\partial\Omega \times (0,T)} = g \end{array} \right. \quad (3)$$

Bew: v & w zwei Lösungen

Setze $u = v - w$. Lösung zu $f=0$, $u_0=0$, $g=0$

Max-Prinzip $\Rightarrow u \equiv 0 \Rightarrow v = w$



Jetzt aber:

Distributionen

(4)

Grundidee: $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Abb.

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto u(x) \in \mathbb{R}$$

Hier immer: Annahme: Für jede kompakte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$

gilt $\int_M |u| < \infty$

Wir können u auffassen als Abb. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \varphi \in \mathbb{R}$ (5)

mit $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) := C_c^\infty(\mathbb{R}^n) = \{ \varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ unendl. oft stetig diffbar,} \}$

Wichtiger Satz (über $L^1(\mathbb{R}^n)$):

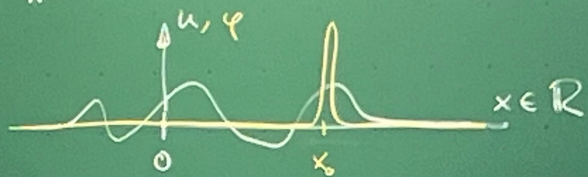
Sei $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:
 $\uparrow$
(s.o.)

$$\text{supp}(\varphi) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \neq 0\}} \text{ kompakt}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u = 0$$

oder, äquivalent:
"beschränkt"

Bild: $n=1$



(6)

Wannung:

$$u(x) := \begin{cases} 1 & \text{in } x=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann: $u \cdot \varphi \geq 0$

$$u \cdot \varphi \neq 0$$

$$\Rightarrow \int u \cdot \varphi > 0$$

Dann: $\int u \varphi = 0 \quad \forall \varphi$ (das einzelne Pt. wird nicht gesehen) Aber $u \neq 0$

"Auflösung":

L^1 besteht aus "Äquivalenzklassen von Fkt." ⑦

$$u(x)=v(x) \text{ fast alle } x \Rightarrow u=v \text{ in } L^1$$

für alle x bis auf eine Nullmenge

u in Wertung ist in diesem Sinn: $u=0$

Notation: Zu Abbildung $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

bilde Distribution $\langle u \rangle: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi \mapsto \langle u \rangle(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} u \varphi$$

Satz besagt: $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit $\langle u \rangle = \langle v \rangle$

$$\text{Dann: } \int_{\mathbb{R}^n} (u-v) \varphi = 0 \quad \forall \varphi$$
$$\xRightarrow{\text{St}} u = v$$

Kurz:

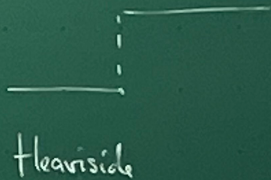
$$\langle u \rangle = \langle v \rangle \Rightarrow u = v \text{ in } L^1$$

"Aus $\langle u \rangle$ kann u eindeutig rekonstruiert werden."

Beispiele ($n=1, x \in \mathbb{R}$)

③

$$H(x) := \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



$$\langle H \rangle(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} H \varphi = \int_0^{\infty} \varphi$$

Dirac-Delta

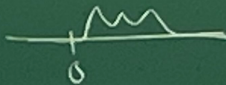
(10)

$$\delta_0 : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \varphi(0)$$

Warnung: $\nexists u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) : \langle u \rangle = \delta_0$

Beweisidee: Wegen $\delta_0(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi$ mit $\varphi(0) = 0$

müsste gelten $u(x) = 0$ fast alle $x \neq 0$



Dann: $u = 0$ in L^1_{loc}

Und $\langle 0 \rangle = 0 : \varphi \mapsto 0$ NICHT Dirac

Frage: $\partial_x \langle H \rangle \stackrel{?}{=} \delta_0$

Ja!

(11)

Definition: Ableitung einer Distribution

Sei $\lambda: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Distrib., $j \leq n$

Dann: $\partial_j \lambda: \varphi \mapsto \lambda(-\partial_j \varphi)$

Motivation: $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$

$j \leq n$ $\partial_j u \in C^0(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \partial_j u \rangle(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j u \cdot \varphi \stackrel{\text{Gauß}}{=} - \int_{\mathbb{R}^n} u \partial_j \varphi$$

$$\begin{matrix} \parallel \\ (\partial_j \langle u \rangle)(\varphi) \end{matrix}$$

Mit dieser Def: Was ist $\partial_x \langle H \rangle$?

(12)

$$\left(\partial_x \langle H \rangle \right) (\varphi) \stackrel{\text{Def. All.}}{=} \langle H \rangle (-\partial_x \varphi)$$

$$\stackrel{\text{Def. H}}{=} \int_0^\infty (-\partial_x \varphi) = \varphi(0) = \delta_0(\varphi)$$

Also: $\partial_x \langle H \rangle = \delta_0$ Nach Identifikation $H = \langle H \rangle$: $\boxed{\partial_x H = \delta_0}$

Konvergenz von Distributionen

$$\lambda_k : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

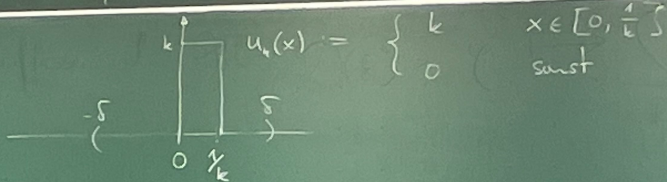
Dann: $\lambda_k \longrightarrow \lambda$ im Distr. sin $\Leftrightarrow \lambda_k(\varphi) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathbb{R}} \lambda(\varphi)$
 $\forall \varphi$

Beim: Diracfolgen

$$u_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} u_k = 1, \\ u_k \geq 0$$

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} |u_k| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall \delta > 0$$

Bsp: $n = 1$



(14)

Beh: $(u_k)_k$ eine Dirac-Folge. Dann: $\langle u_k \rangle \rightarrow \delta_0$ in Distributions

Bew: $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle u_k \rangle(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} u_k \varphi = \int_{B_\delta(0)} u_k \varphi + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} u_k \varphi =$$

(15)

$$\begin{aligned}
 &= \underbrace{\int_{\substack{B_\delta(0) \\ \int |u_k| = 1}} u_k (\varphi - \varphi(0))}_{\substack{\text{klein, falls} \\ \delta > 0 \text{ klein} \\ (\varphi \text{ stetig})}} + \underbrace{\int_{B_\delta(0)} u_k \varphi(0)}_{\substack{= \\ \varphi(0) \int_{B_\delta(0)} u_k \\ \gg (\text{gro\ss} k)}} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} u_k \varphi}_{\substack{\text{klein} \\ \text{wegen } \int |u_k| \text{ klein} \\ \mathbb{R}^n \setminus B_\delta}}
 \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \varphi(0) + o(1) \quad \xrightarrow{\delta \rightarrow 0}$$

$$\varphi(0) \cdot 1$$

$$\text{Ergebnis: } \langle u_k \rangle \xrightarrow{\text{Distr.}} \delta_0 \quad \square$$

Bsp: [Kerrückte Distribution]

(16)

$$(n=1) \quad \varepsilon := \partial_x \delta_0 : \varphi \mapsto \delta_0(-\partial_x \varphi) = -\partial_x \varphi(0)$$

Allgemein: Distributionen sind bel. oft diffbar.

Ableitung & Konvergenz

$$\lambda_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda \text{ in Distributions}$$

$$j \leq n \quad \partial_j \lambda_k(\varphi) = \lambda_k(-\partial_j \varphi) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda(-\partial_j \varphi) = \partial_j \lambda(\varphi)$$

Nächstes mal:

$$n=3$$

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}$$

(18)

Es gilt

$$\boxed{-\Delta \phi = \delta_0}$$

Eigentlich: $-\Delta \langle \phi \rangle = \delta_0$, $-\Delta = -\sum_{j=1}^n \partial_j^2$

Fundamentallsg./Newton-Pot.