

35

Pot. Gl.

$$-\Delta u = f$$

RW

①

36

Wärmeleitung

$$\partial_t u - \Delta u = f$$

---, AWe. u

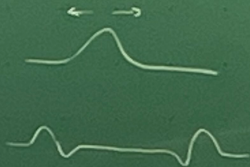
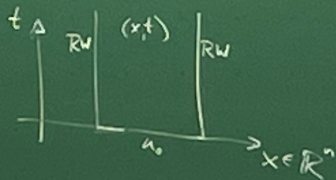
37

Wellengl.

$$\partial_t^2 u - \Delta u = f$$

---, AWe $u, \partial_t u$

$$u_0 = 0$$



Quader: Fourier geht immer,

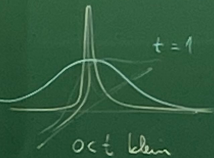
$$\sin(k_1 x_1) \dots \sin(k_n x_n)$$

$$\text{auf } (0, \pi)^n \subset \mathbb{R}^n$$

Ganzraum: Potentialgl. Fundlsg
($n \geq 3$)

$$\phi(x) = c_n \frac{1}{|x|^{n-2}}$$

$$(-\Delta \phi = \delta_0)$$



Wärmeleitung: Fundlsg

$$\phi(x, t) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x, t) dx = 1$$

$$\text{Breite} \sim \sqrt{t}$$

Als Distribution: $(\partial_t - \Delta)\phi = \delta_0$ ③

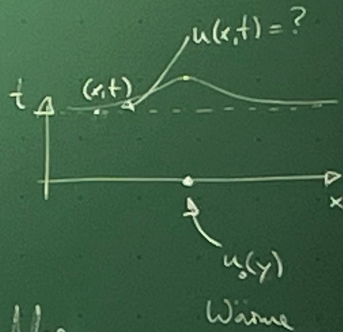
$\phi(x,t) = 0$ für $t \leq 0$

$\nearrow$ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

Hier: Darstellungsformel

$$\left. \begin{array}{l} \partial_t u = \Delta u \\ u|_{t=0} = u_0 \\ \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \end{array} \right\} \Rightarrow u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y,t) u_0(y) dy$$

Lösung ist Faltung des AWs mit Fund. lsg.

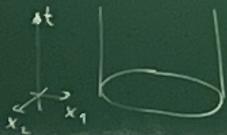


Dies liefert u.a.:

(4)

- Lsg. von $\partial_t u - \Delta u = 0$ ist bel. glt. ($u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$)
- Maximumprinzip: $u(x, t) \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^n} u_0(y)$

Im beschr. Gebiet:



$$u(x, t) \leq \max \left\{ \max_{y \in \bar{\Omega}} u_0(y), \max_{\substack{y \in \partial\Omega \\ s \in [0, t]}} u(y, s) \right\}$$



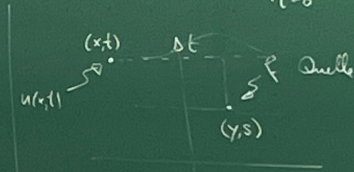
(5)

Andere Darstellungsformel in $\mathbb{R}^n$: $\partial_t u - \Delta u = f$, $u|_{t=0} = 0$

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t-s) f(y,s) dy ds$$

$(\partial_t - \Delta)$

$(\partial_t - \Delta)\Phi = \delta_0$ ✓



37 Wellenzgl.

(6)

$$\partial_t^2 u - \Delta u = f$$

$$u|_{t=0} = u_0$$

Ansatz: $(0, \pi)^n$, $u_n = 0$

$$\partial_t u|_{t=0} = u_1$$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k \cos(\omega_k t) (\sin k_1 x_1) \cdots (\sin k_n x_n) = u(x, t)$$

a_k Fourier-Koeffizienten u_0

$$\text{mit } \omega_k^2 = |k|^2$$

$$\begin{matrix} u_0 = 0 \\ u_1 \neq 0 \end{matrix}$$



"

$$\frac{\sin(\omega_k t)}{\omega_k}$$

"

stetl. cos.

(7)

→ kein Max. Prinzip
→ keine zusätzl. Regularität

WL: $a_k e^{-|k|^2 t}$ schnell abf.
für $|k| \rightarrow \infty$

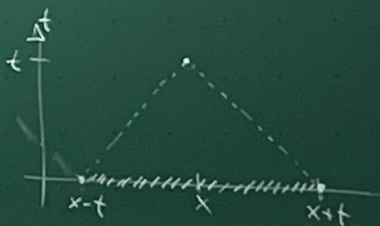
Wellen: $a_k \underbrace{\cos(\omega_k t)}_{\text{Ordnung 1}}$ kein schneller
Abfall für $k \rightarrow \infty$

(9)

D'Alembert (1D)

 $(u_0 = 0)$

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [u_0(x+t) + u_0(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(y) dy$$



Δ
kein Max-Prinzip!

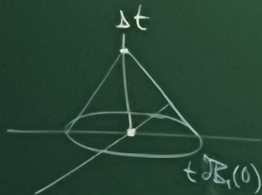
In 3D, $\mathbb{R}^3$

(10)

$$\left. \begin{array}{l} u_n = 0 \\ f = 0 \end{array} \right\}$$

$$u(x,t) = \int_S u_0(x + t\xi) + t\xi \cdot \nabla u_0(x + t\xi) dS(\xi)$$

Kirchhoff



$$S = \partial B_1(0)$$

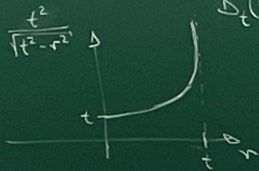
$$\int_S = \frac{1}{|S|} \int_S$$

In 2D, $\mathbb{R}^2$

$$u_0 = 0$$



$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{B_t(0)} \frac{\frac{t^2}{2}}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} u_1(y) dy$$



Mittelung von u_1 in $B_t(0)$,
wichtig sind Werte von u_1 nahe $\partial B_t(0)$,
aber nicht nur die!

Alle Formeln zeigen: Endliche Ausbreitungsgeschw. (12)

"Information wird nicht schneller als $c = 1$
transportiert"

$$\partial_t^2 u = c^2 \Delta u$$

Test: $u_0(x-ct)$

c^2 Einheit: $\frac{m^2}{s^2}$

38 Distributionen

13

Motivation: $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

$$\partial_x u = ?$$

Antwort: $\partial_x u = \delta_0$

Wie definiert man das ??

— Distribution, Abb von $C_c^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

Grundidee: u wird identifiziert mit $\langle u \rangle(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} u(x) \varphi(x) dx$

Also in Beispiel:

$\langle u \rangle :$

φ

$\mapsto$

$$\int_0^{\infty} \varphi(x) dx$$