

Kap 35

Potentialgl.

$$\Delta u = f \quad (1)$$

$$(\Delta u = 0)$$

Quader: Fourier

$$\prod_i (\sin k_i x_i)$$

(D)

nD:

$$U(r) Y(\xi)$$

Kugel:

2D

$f=0$

$$r^k \sin k\varphi$$

(D)

$$x = \xi r$$

S-Orb.



$V_0 = \text{const}$



p-Orb.



$\mathbb{R}^n$:

Fund. Lsg.:

$$\phi(x) = c_n \frac{1}{|x|^{n-2}}$$

Später: $-\Delta \phi = \delta_0$ (2)

↑
Distrib.

Green'sche Fkt. $G(x, y)$

$n \geq 3$

Hier:

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y) f(y) dy$$

$$\Rightarrow -\Delta u = f$$

Darstellungsformel (1)

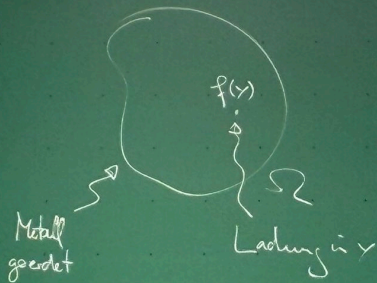
Lösung von

lautet:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy$$

Bild:



$f(y)$ erzeugt Potential $G(\cdot, y)$
bei Randwerten $= 0$

Eigenschaften:

(F)

Mittelwerteigenschaft

$$\Delta u = 0 \Rightarrow u(x) = \int_{\partial B_r(x)} u$$

Beweis:

$$\frac{d}{dr}$$

$$\int_{\partial B_r(x)} u(y) dS(y)$$

$$= 0$$

(4)

$$\underbrace{\partial B_r(x)}$$

u st. $\downarrow r \rightarrow 0$

$u(x)$

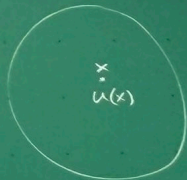
$$\int_{\partial B_r} \nabla \cdot \nabla u = \int_{B_r} \Delta u = 0$$

Variante mit Volumenintegral

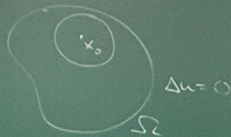
Sei $\varphi: [0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ "Gewichtsfkt"

$$\int_{B_r(0)} \varphi(|x|) dx = 1 \quad (*)$$

$$\psi(x) := \varphi(|x|)$$



Dann: $\Delta u = 0 \Rightarrow \left[\int_{B_r(x_0)} u(y) \varphi(y-x_0) dy = u(x_0) \right] \quad (\text{MWF}) \quad (5)$



$$B_r(x_0) \subset \Omega$$

Check: $u \equiv 1$ harm.

$$(\text{MWF}) \Rightarrow (*)$$

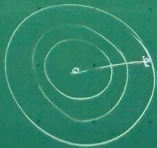
Beweis: Integriere Sphären-Mittel-Formel über Radius auf
 $\rightarrow$ Zwiebelintegral

Radius $s > 0$
 $\partial B: x_0 = 0$

$$\Delta u = 0$$

$$\varphi(s) s^{n-1}$$

$$\int_0^r ds$$



$$u(0) = \int_{\partial B_s(0)} u = \frac{1}{s^{n-1} |\partial B_1|} \int_{\partial B_s(0)} u(\xi) dS(\xi) \quad (6)$$

$$\int_0^r \varphi(s) s^{n-1} |\partial B_1| u(0) ds \stackrel{(*)}{=} u(0) \cdot 1$$

$$= \int_0^r \int_{\partial B_s(0)} u(\xi) \varphi(s) dS(\xi) ds$$

$$= \int_{B_r(0)} u(y) \varphi(|y|) dy$$

Cor. aus MW-Formel

$$(\varphi(s) = 0 \forall s > r) \quad (7)$$

$$u(x) = \int_{\Omega} u(y) \varphi(|y-x|) dy$$



$\rightarrow \partial_{x_j} u(x)$ existiert, sogar bel. oft diffbar

$\varphi \equiv \text{const}$ nahe $s=0$

Resultat: $\Delta u = 0 \Rightarrow u \in C^\infty$
(E)

Dann:

φ glatt

$$\varphi(x) = \varphi(|x|)$$

Weiteres Cor.:

Maximumprinzip

8

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt

$u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$\Delta u = 0$

$\Rightarrow$

$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x)$

$\leq$

$\max_{x \in \partial \Omega} u(x)$

$\left(u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \right)$

$\left(\text{also: } " = " \right)$

Beweis Idee:

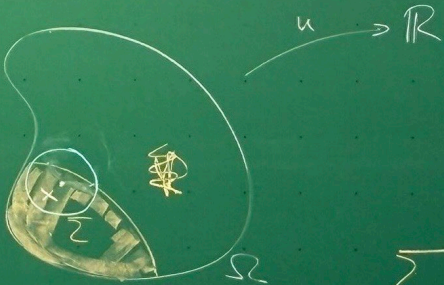
(9)

Ann: $\Sigma \neq \bar{\Omega}$.

Wähle $x \in \Sigma$

$r > 0$

$$\partial B_r(x) \not\subset \Sigma$$



$$M := \max_{\bar{\Omega}} u$$

$$\Sigma := \{x \in \bar{\Omega} \mid u(x) = M\}$$

MWF:

$$M = u(x)$$

$$= \int_{\partial B_r} \underbrace{u(y)}_{\leq M} dS(y) \quad (=M)$$

□

$$\Leftarrow \partial B_r \subset \Sigma \Leftarrow$$

$$u = M \text{ auf } \partial B_r$$

$$\left| \begin{array}{l} f: [0,1] \xrightarrow{\text{st.}} \mathbb{R}, \int_0^1 f = 0 \\ f \geq 0, \end{array} \right. \Rightarrow f \equiv 0$$

Kap: 36 Diffusionsgl. (= Wärmeleitungsgl.) (10)

$$\partial_t u = \Delta u \quad (*)$$

$$n=1, \Omega = (a, b), \quad -\infty < a < b < \infty$$

↳ Fourier-Reihe

35	$-\Delta u = 0$
36	$\partial_t u - \Delta u = 0$
37	$\partial_t^2 u - \Delta u = 0$

$$(a, b) = (0, \pi)$$

Ansatz

$$u(x, t) = U(t) \sin(kx)$$

$$\underbrace{k \in \mathbb{N}}_{\downarrow}$$

(11)

Einsetzen in (*):

Allg. Lsg. von

$$\partial_t u = \Delta u \text{ auf } (0, \pi) \times (0, \infty)$$

$$\partial_t U(t) = -k^2 U(t)$$

$$U(t) = A_k e^{-k^2 t}$$

$$u(a, t) = 0 = u(b, t) \quad \forall t > 0$$

(D) & (L)

$$u(x, 0) = u_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \sin kx$$

lautet

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k e^{-k^2 t} \sin kx$$

Ähnlich, falls:

$$\partial_t u = \Delta u + f$$

$f \neq 0$. Dann $f(x, t) = \sum_k b_k(t) \sin kx$ (12)

mit $\partial_t U_k = -k^2 U_k + b_k$

und, falls $u(0, t) = g(t)$

löse mit $U_k = U_k(t)$

Setze g fort zu $g(x, t)$

mit $g(\pi, t) = 0 \forall t$

$$\partial_t v = \Delta v - \underbrace{\partial_t g + \Delta g}_{-f}$$

Ansatz: $u(x, t) = g(x, t) + v(x, t)$, also: v mit R.W. = 0

Quasies: Separans: $u(x,t) = U(t) (\sin k_1 x_1) \dots (\sin k_n x_n)$ (13)

$$\partial_t U = -|k|^2 U$$

Kugeln und Kugelfkt. ✓

$$U(t) = e^{-|k|^2 t}$$

$$k \in \mathbb{N}^n$$

Ganzraum, $\mathbb{R}^n$

Fundamentalsg.:

$$\phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

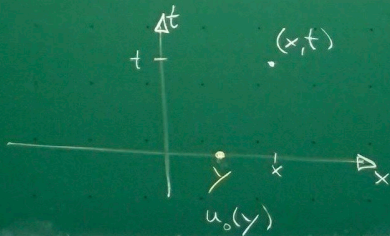
Damit lassen sich Lösungen angeben

(15)

$$\partial_t u = \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y) \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|y-x|^2}{4t}} dy$$



(D), (L)