

Laplace-Operator

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2$$

(1)

$$-\Delta u = 0 \quad (\text{Laplace-Gl.})$$

Lösungen: harmonische Fkt.

$$-\Delta u = f \quad (\text{Poisson-Gl. / Potentialgl.})$$

$n=1$ (1D)

Lösung durch Integrieren, $-\partial_x^2 u = f$

(2)

Quadrat: Fourier- $\hat{u}$.

Kugeln:
$$\Delta u = \frac{1}{r^{n-1}} \partial_r (r^{n-1} \partial_r u) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\text{LB}} u$$

$$u(r, \xi) = u(x)$$

$$x = r\xi, \xi \in S^{n-1}$$

Wieder: 2D: $r^k (\sin k\varphi)$ ist harm.

n D: Y eine Kugelfkt., $-\Delta_{\text{LB}} Y_k = \lambda_k Y_k$, $r^k Y_k(\xi)$ ist harm.

Damit, auf Angeben: Log. als Poincaré-R.

(3)

$\mathbb{R}^n$ Zuf., suche $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, mit
 $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$

Fund. Log.
(Newton-Pot.): $\phi_n(x) := \begin{cases} -c_n \log |x| & n=2 \\ c_n \frac{1}{|x|^{n-2}} & n \geq 3 \end{cases}$

$$\nabla \phi_n(x) = \frac{1}{4} - C_n (n-2) r^{-n+1} \vec{e}_r$$

denke $n \geq 3$

nD:
($n \geq 3$)

(4)

2D

n=2:

$$\nabla \phi_2(x) = -C_2 \frac{1}{r} \vec{e}_r$$

Ende Wiederholung

In bel. Dim:

$$\nabla \phi(x) = - \frac{1}{|\mathbb{B}_1(0)|} \frac{1}{|x|^{n-1}} \frac{x}{|x|}$$

(5)

c_n ist so, dass



Beh: ϕ_n ist harmonisch in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Bew: Klassisch (in x -Koord.) in Übung

Hier: Kugelkoord:

$$\frac{1}{r^{n-1}} \partial_r \left(r^{n-1} \partial_r \underbrace{\frac{1}{r^{n-2}}}_{u(r)} \right) = \frac{1}{r^{n-1}} \partial_r \left(r^{n-1} (2-n) r^{1-n} \right) = 0$$

Wichtige Rechnung:

⑥

Sei $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ mit komp. Träger ($\exists R > 0$:
 $\varphi(x) = 0 \forall |x| > R$)

Frage: $\int_{\mathbb{R}^n} \Delta \phi \cdot \varphi = ???$

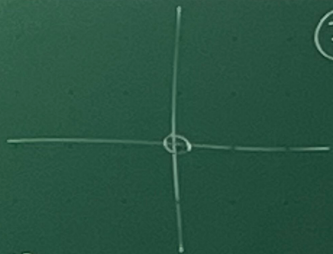
Stattdessen:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \phi \cdot \nabla \varphi = \Delta \quad (*)$$

$|\nabla \phi| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_0^1 \overbrace{\frac{1}{r^{n-1}}}^{|\nabla \phi|} r^{n-1} dr < \infty$$

$$\textcircled{*} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla \phi \cdot \nabla \psi$$



(7)

P.I.
=

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(- \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Delta \phi \cdot \psi}_{=0} \right)$$

$$+ \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \underbrace{\left(-\frac{x}{|x|} \right)}_{=\nabla} \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{|B_\varepsilon(0)|} \frac{1}{|x|^{n-1}} \frac{x}{|x|} \right]}_{=\nabla \phi(x)} dS_x \underbrace{\psi(x)}_{\psi(x)}$$

$$(*) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$$

$$\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \underbrace{\frac{1}{|\partial B_\varepsilon(0)|} \frac{1}{|x|^{n-1}}}_{=1} \varphi(x) dS(x) \quad (8)$$

$\nearrow \varphi(0) + O(\varepsilon)$

$$= \varphi(0)$$

Ergebnis für Fundlog. Φ_n :

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \Phi_n \nabla \varphi = \varphi(0)}$$

Alg Distribution:

$$-\Delta \phi_n = \delta_0$$

⑨

$$\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta_0 \varphi$$

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

"gute" Fkt.

(st., lpt. Träger, C^1)

10

Setze $u := \phi_n * f$

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_n(x-y) f(y) dy$$

$$-\Delta u(x) = -\nabla \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \phi_n(x-y) f(y) dy \right) =$$

$$= - \nabla \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \phi_n(y) f(x-y) dy \right)$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \phi_n(y) \underbrace{\nabla f(x-y)}_{= \nabla \varphi_n(y)} dy$$

$$\stackrel{(*)}{=} \varphi_n(y=0) = f(x)$$

$$\int g(x-y) h(y) dy \quad (11)$$

$$= \int \underbrace{g(y)}_{x-y} \underbrace{h(x-y)}_y dy$$

(x fest)

$$\varphi_n(y) := f(x-y)$$

$$\nabla \varphi_n(y) = - \nabla f(x-y)$$

Ergebnis: $u := \phi_n * f$

(12)

erfüllt $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$

→ "L" Lösung.

"D" Darstellung
der Lsg.

n ≥ 3

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot c \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dy$$

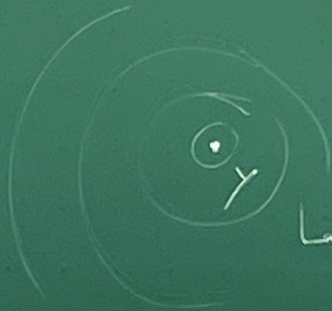
Vorstellung (Physik)

13

$\rho = \rho$ Ladungsdichten

u: Summieren auf $\rightarrow$ Integral

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) \frac{c_3}{|x-y|} dy$$



Ladungsdichte
 $\rho(y)$

erzeugt Feld

$$\underline{n=3}$$

$$\sim \frac{1}{|x-y|^1}$$

Zusammenfassung Lösungstheorie

14

$$\Omega \text{ beschr.}, \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \left. \begin{array}{l} f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right\} \text{ Dann: } \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{array} \right.$$

$\Omega = \mathbb{R}^n, f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ "gut". Dann $\exists$ Lsg u von $-\Delta u = f$ hat eine einkl. Lsg.

$\exists$ Darstellungsformel. Ω Quader
 Ω Kugel
 $\Omega = \mathbb{R}^n$
 $\Omega = \text{Halbraum}$

Mit Forderung $u(x) \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$: Lsg. einkl.

Zwei wichtige Eigenschaften harm. Fkt.

(15)

1

Mittelwertformel

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega$$

$$x \in \Omega$$

$$\overline{B_r(x)} \subset \Omega$$



$$u(x) = \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS(y)$$

$$\left(:= \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u dS \right)$$

Beweismögl.

Darstellungsformel auf Kugeln

$$\exists G(x, y):$$

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\partial} = g \stackrel{!}{=} u$$



Beitrag von y in 'Pkt' x
ist $G(x, y)$

$$u(x) = \int_{\partial B_r(x)} G(x, y) g(y) dS(y)$$

$$G(x, y) = \tilde{G}(|x - y|) - \hat{G}(r)$$

$$= c \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS(y)$$

$$\text{"konst"} \Rightarrow c = \frac{1}{|\partial B_r(x)|}$$