Aufgabe 1. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \colon D \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$. Wir schreiben $f = u + iv$ mit $u, v \colon D \to \mathbb{R}$.

a) Wann nennt man f in z_0 *komplex differenzierbar*?

Eine Funktion f ist in z_0 genau dann komplex differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$f'(z_0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z_0+z) - f(z_0)}{z}$$

existiert.

b) Wann nennt man f in D *holomorph*?

Eine Funktion f heißt holomorph, wenn sie in jedem Punkt komplex differenzierbar ist.

c) Formulieren Sie die *Cauchy-Riemann Differentialgleichungen*.

Die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen lauten

$\partial_x u(z_0) = \partial_y v(z_0)$ und $\partial_x v(z_0) = -\partial_y u(z_0)$ für alle $z_0 \in D$.

Aufgabe 2. Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ offen, $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ und $v \in C^1(M, \mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie

$$\operatorname{div}(f\, v) = \nabla f \cdot v + f \operatorname{div}(v)\,.$$

$$\operatorname{div}(fv) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f v_1 \\ f v_2 \\ f v_3 \end{pmatrix}$$

$$= \partial_1(fv_1) + \partial_2(fv_2) + \partial_3(fv_3) \qquad \Big|\text{ Produktregel}$$

$$= (\partial_1 f)v_1 + f \cdot \partial_1 v_1 + (\partial_2 f)v_2 + f \cdot \partial_2 v_2 + (\partial_3 f)v_3 + f \cdot \partial_3 v_3$$

$$= \underbrace{(\partial_1 f)v_1 + (\partial_2 f)v_2 + (\partial_3 f)v_3}_{} + f \cdot \underbrace{(\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3)}_{}$$

$$= (\vec{\nabla} f) \cdot v + f \cdot \operatorname{div}(v)$$

Aufgabe 3. Formulieren Sie den

a) *Cauchy-Integralsatz.*

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, beschränkt, zusammenhängend und einfach zusammenhängend.
Sei $f: \bar{D} \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph in D.

Dann gilt für $z_0 \in D$: $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz = f(z_0)$.

b) *Satz von Liouville.*

Es sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt. Dann ist f konstant.

Aufgabe 4. Es sei V ein reeller Vektorraum versehen mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$. Weiter sei $\| \cdot \|$ die von dem Skalarprodukt induzierte Norm. Zeigen Sie für alle Vektoren $u, v \in V$ mit $\|u\| = \|v\| = 1$ die Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$|\langle u, v \rangle| \leq 1 \,.$$

Wir wählen $\lambda = \langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$ mit $\lambda^2 = |\langle u, v \rangle|^2$.

Dann gilt:

$$0 \leq \langle u - \lambda v, u - \lambda v \rangle = \|u\|^2 - 2\lambda \underbrace{\langle u, v \rangle}_{\lambda} + \lambda^2 \|v\|^2 \quad \Big| \text{ Wir wissen } \|u\|^2 = \|v\|^2 = 1$$

$$= 1 - 2\lambda^2 + \lambda^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - \lambda^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow |\langle u, v \rangle|^2 \leq 1 \quad \Big| \sqrt{\ldots}$$

$$\Leftrightarrow |\langle u, v \rangle| \leq 1 \quad \square$$

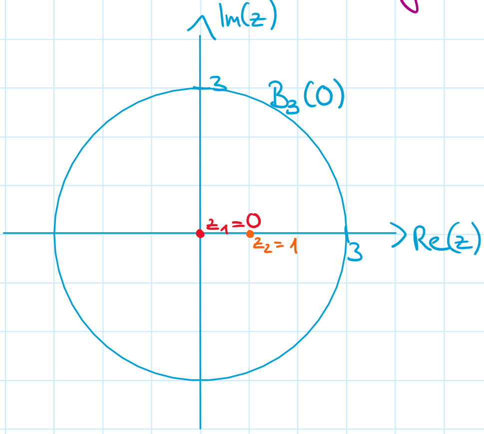
Aufgabe 5. Wir betrachten $B_3(0) \subset \mathbb{C}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial B_3(0)} \frac{e^{2z}}{z(z-1)^2} \, \mathrm{d}z \,.$$

Wir betrachten den Integranden: $\frac{e^{2z}}{z(z-1)^2}$ besitzt zwei Polstellen.

1. Eine Polstelle 1. Ordnung bei $z_1 = 0$.

2. Eine Polstelle 2. Ordnung bei $z_2 = 1$.



Beide Polstellen liegen also in $B_3(0)$.

Wir berechnen also die Residuen in z_1 und z_2.

1. $\operatorname{Res}(f; z_1=0) = \lim\limits_{z \to z_1 = 0} \left(\cancel{z} \cdot \frac{e^{2z}}{\cancel{z}(z-1)^2} \right) = \lim\limits_{z \to 0} \frac{e^{2z}}{(z-1)^2} = \frac{e^0}{(-1)^2} = 1$

2. Um das Residuum in $z_2 = 1$ zu berechnen, "erinnern" wir uns an 29.22 aus dem Skript:

Für eine Polstelle der Ordnung m gilt mit $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$:

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g^{(m-1)}(z)}{(m-1)!} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

Hier für eine Polstelle 2. Ordnung mit $g(z) = \cancel{(z-1)^2} \frac{e^{2z}}{z\cancel{(z-1)^2}} = \frac{e^{2z}}{z}$:

$$\operatorname{Res}(f; z_2=1) = \lim_{z \to z_2 = 1} g'(z)$$
$$= \lim_{z \to 1} \left(\frac{2ze^{2z} - e^{2z}}{z^2} \right) = \frac{2e^2 - e^2}{1} = e^2$$

Damit haben wir: $$\int_{\partial B_3(0)} \frac{e^{2z}}{z(z-1)^2}\, dz = 2\pi i \Big(\operatorname{Res}(f; z_1=0) + \operatorname{Res}(f; z_2=1) \Big)$$
$$= 2\pi i \left(1 + e^2 \right)$$

Aufgabe 6. Gegeben seien die Fläche

$$F := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\,,\; x_2 \geq 0\,,\; x_3 \geq 0\right\}$$

und das Vektorfeld

$$v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2\,,\, x_2 x_3\,,\, x_1 x_3)\,.$$

Berechnen Sie für einen Einheitsnormalenvektor n an F das Integral

$$\int_F \operatorname{rot}(v) \cdot n \,\mathrm{d}S$$

a) direkt.

In $F := \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1}_{r=1}, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0 \}$ sehen wir Kugelkoordinaten mit $r = 1$.

Hinweis: Benutzen Sie Kugelkoordinaten mit $r = 1$:

$$\phi(\varphi, \theta) = (\cos(\varphi)\cos(\theta)\,,\, \sin(\varphi)\cos(\theta)\,,\, \sin(\theta))\,, \qquad \varphi \in [0, 2\pi)\,, \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Es gilt

$$\operatorname{rot}(v) = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - x_2 \\ 0 - x_3 \\ 0 - x_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Ein Normalenvektor ist gegeben durch

$$n = \partial_\varphi \phi(\varphi,\vartheta) \times \partial_\vartheta \phi(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} -\cos\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \cos\varphi \\ -\sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$= \cos\vartheta \; \phi(\varphi,\vartheta)\,.$$

Damit können wir das Integral berechnen:

$$\int_F \operatorname{rot}(v)\cdot n \, dS = \int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{rot}(v(\phi(\varphi,\vartheta))) \cdot n \; d\varphi \, d\vartheta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\begin{pmatrix} x_2(\phi(\varphi,\vartheta)) \\ x_3(\phi(\varphi,\vartheta)) \\ x_1(\phi(\varphi,\vartheta)) \end{pmatrix} \cdot \cos\vartheta \; \phi(\varphi,\vartheta) \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sin\varphi \cos\varphi \cos^3\vartheta - \sin\varphi \sin\vartheta \cos^2\vartheta - \cos\varphi \sin\vartheta \cos^2\vartheta\right) d\vartheta \, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2} \Big(\underbrace{\Big[-\frac{1}{2} \sin^2\varphi \cos^3\vartheta \Big]_{\varphi=0}^{\pi}}_{=0} + \Big[\cos\varphi \sin\vartheta \cos^2\vartheta\Big]_{\varphi=0}^{\pi} - \underbrace{\Big[\sin\varphi \sin\vartheta \cos^2\vartheta\Big]_{\varphi=0}^{\pi}}_{=0} \Big) d\vartheta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \Big(\underbrace{\cos\pi}_{=-1} \sin\vartheta \cos^2\vartheta - \underbrace{\cos 0}_{=1} \sin\vartheta \cos^2\vartheta \Big) d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi} -2 \sin\vartheta \cos^2\vartheta \, d\vartheta$$

$$= -\frac{2}{3} \Big[\cos^3\vartheta\Big]_{\vartheta=0}^{\pi/2} = -\frac{2}{3}$$

b) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

F beschreibt eine Viertelkurve. Den Rand parametrisieren wir durch die zwei Kurven

$$\gamma_1 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, 0) \quad \text{mit} \quad \gamma_1'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

$$\gamma_2 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma_2(t) = (-\cos t, 0, \sin t) \quad \text{mit} \quad \gamma_2'(t) = (\sin t, 0, \cos t)$$

Mit dem Satz von Stokes lässt sich das Integral in ein Kurvenintegral über den Rand von F (∂F) schreiben.

$$\int_F \operatorname{rot}(v)\, n \, dS = \int_{\partial F} v \, dx = \int_{\gamma_1} v \, dx + \int_{\gamma_2} v \, dx$$

$$= \int_0^{\pi} v(\gamma_1(t))\, \gamma_1'(t)\, dt + \int_0^{\pi} v(\gamma_2(t))\, \gamma_2'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} \cos t \sin t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\cos t \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{\pi} -\sin^2 t \cos t \, dt + \int_0^{\pi} -\sin t \cos^2 t \, dt$$

$$= \underbrace{\Big[-\frac{\sin^3 t}{3} \Big]_0^{\pi}}_{=0} + \Big[\frac{\cos^3 t}{3} \Big]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{3} \underbrace{\cos^3\pi}_{=-1} - \frac{1}{3} \underbrace{\cos 0}_{=1} = -\frac{2}{3}$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten der Funktion

$$f\colon[-\pi,\pi]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}0 & \text{für } -\pi\le x<-\frac{\pi}{2}\\ \cos(x) & \text{für } -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}.$$

Hinweis: Es gilt für alle $x,y\in\mathbb{R}$:

$$\cos(x-y)+\cos(x+y)=2\cos(x)\cos(y)\,,$$
$$\sin(x-y)+\sin(x+y)=2\sin(x)\cos(y)\,.$$

Die Funktion f ist eine gerade Funktion (das sehen wir an dem cos(x)-Teil).

=> Alle Koeffizienten b_k sind null ($b_k=0$)

Also berechnen wir nur die a_k.

Es gilt mit $T=2\pi$ und $\omega=\frac{2\pi}{T}=1$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(k\omega x)$$

$$=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi}\Big(\underbrace{\int_{-\pi}^{-\pi/2}0\cos(kx)\,dx}_{=0}+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(x)\cos(kx)\,dx+\underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi}0\cdot\cos(kx)\,dx}_{=0}\Big)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(x)\cos(kx)\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\cos(x)\cos(kx)\,dx$$ | Aus der Aufgabe: $\cos(x)\cos(y)=\frac{1}{2}\big(\cos(x-y)+\cos(x+y)\big)$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\cos((k-1)x)+\cos((k+1)x)\,dx$$ | Wir betrachten hier zuerst $k\neq1$.

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((k-1)x)}{k-1}+\frac{\sin((k+1)x)}{k+1}\right]_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin((k-1)\frac{\pi}{2})}{k-1}+\frac{\sin((k+1)\frac{\pi}{2})}{k+1}\right)$$

$$=\begin{cases}0 & \text{für ungerade } k\\ \frac{1}{\pi}\left(\frac{-(-1)^{\frac{k}{2}}}{k-1}+\frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{k+1}\right)=\frac{(-1)^{k/2}}{\pi}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k-1}\right) & \text{für gerade } k\end{cases}$$

Das sehen wir, wenn wir $\sin((k\pm1)\frac{\pi}{2})$ betrachten.

Für ungerade k ist $k\pm 1$ gerade

$$\Rightarrow \quad \sin\left((k\pm 1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin(n\pi) = 0 \quad \text{mit } n = \frac{k\pm 1}{2} \in \mathbb{Z}$$

Für gerade k ist $k\pm 1$ ungerade.
Dann gilt

$$\sin\left((k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{\frac{k}{2}}$$

und

$$\sin\left((k-1)\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left((k+1)\frac{\pi}{2}\right) = -(-1)^{\frac{k}{2}}.$$

Jetzt betrachten wir noch den Fall $k=1$:

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(2x) + 1\right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(2x)}{2} + x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } k=1 \\ 0 & \text{für } k \text{ ungerade} \\ \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{\pi}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1}\right) & \text{für } k \text{ gerade} \end{cases}$$

Aufgabe 8. Wir betrachten für $\mu \in \mathbb{C}$ und $x \in [0,\pi]$ das Rand-Eigenwertproblem

$$-(y'' + 2y' + y) = \mu^2 y\,,$$
$$y(0) = 0\,, \quad y(\pi) - y'(\pi) = 0\,.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Rand-Eigenwertproblems.

$$-(y'' + 2y' + y) = \mu^2 y$$

$$\Leftrightarrow \quad y'' + 2y' + y + \mu^2 y = 0$$

$\Leftrightarrow \quad y'' + 2y' + (1+\mu^2)y = 0 \qquad \mid$ Exp. Ansatz $y(x) = e^{\lambda t}$, $y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} + 2\lambda \cancel{e^{\lambda t}} + (1+\mu^2)\cancel{e^{\lambda t}} = 0 \quad \mid e^{\lambda t} \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 + 2\lambda + (1+\mu^2) = 0$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-(1+\mu^2)}$$

$$= -1 \pm \sqrt{1-1-\mu^2}$$

$$= -1 \pm \sqrt{\mu^2}$$

$$= -1 \pm i\mu$$

Wir unterscheiden die Fälle $\mu = 0$ und $\mu \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

<u>Fall 1:</u> $\mu = 0$

Im Fall $\mu = 0$ gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

Unser Fundamentalsystem ist also durch

$\phi_1(x) = e^{-x} \quad (\phi_1'(x) = -e^{-x})$

$\phi_2(x) = xe^{-x} \quad (\phi_2'(x) = (1-x)e^{-x})$

Wir prüfen, ob $\mu = 0$ ein Eigenwert ist.
Dazu berechnen wir

$$\begin{vmatrix} R_1(\phi_1) & R_1(\phi_2) \\ R_2(\phi_1) & R_2(\phi_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi_1(0) & \phi_2(0) \\ \phi_1(\pi) - \phi_1'(\pi) & \phi_2(\pi) - \phi_2'(\pi) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ e^{-\pi} + e^{-\pi} & \pi e^{-\pi} - (e^{-\pi} - \pi e^{-\pi}) \end{vmatrix}$$

$$= (2\pi - 1)e^{-\pi} \neq 0$$

Damit ist $\mu = 0$ kein Eigenwert zum Randeigenwertproblem!

<u>Fall 2:</u> $\mu \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

In diesem Fall gilt $\lambda_1 = -1 + i\mu$ und $\lambda_2 = -1 - i\mu$.
Damit ist das Fundamentalsystem

$$\phi_1(x) = e^{(-1+i\mu)x} \qquad \left(\phi_1'(x) = (i\mu - 1) e^{(-1+i\mu)x} \right)$$

$$\phi_2(x) = e^{(-1-i\mu)x} \qquad \left(\phi_2'(x) = -(1+i\mu) e^{(-1-i\mu)x} \right)$$

Auch hier prüfen wir, wann μ ein Eigenwert ist.

$$\begin{vmatrix} R_1(\phi_1) & R_1(\phi_2) \\ R_2(\phi_1) & R_2(\phi_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi_1(0) & \phi_2(0) \\ \phi_1(\pi) - \phi_1'(\pi) & \phi_2(\pi) - \phi_2'(\pi) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^0 & e^0 \\ e^{(-1+i\mu)\pi} - (i\mu - 1) e^{(-1+i\mu)\pi} & e^{(-1-i\mu)\pi} + (i\mu + 1) e^{(-1-i\mu)\pi} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (2 - i\mu) e^{(-1+i\mu)\pi} & (2 + i\mu) e^{(-1-i\mu)\pi} \end{vmatrix}$$

$$= (2+i\mu) e^{(-1-i\mu)\pi} - (2 - i\mu) e^{(-1+i\mu)\pi} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2+\mu) e^{(-1-\mu)\pi} = (2 - i\mu) e^{(-1+i\mu)\pi}$$

$$\Leftrightarrow \quad (2+i\mu) \cancel{e^{-\pi}} e^{-i\mu\pi} = (2 - i\mu) \cancel{e^{-\pi}} e^{i\mu\pi}$$

$$\Leftrightarrow \quad (2+i\mu) e^{-i\mu\pi} = (2 - i\mu) e^{i\mu\pi}$$

$$\Leftrightarrow \quad (2+i\mu)(\cos(\mu\pi) - i\sin(\mu\pi)) = (2 - i\mu)(\cos(\mu\pi) + i\sin(\mu\pi))$$

$$\Leftrightarrow \quad 2i\mu\cos(\mu\pi) - 4i\sin(\mu\pi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu\cos(\mu\pi) - 2\sin(\mu\pi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu = 2\tan(\mu\pi)$$

Unsere Eigenwerte sind also durch alle $\mu_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gegeben, die

$$0 = 2\tan(\mu_n\pi) - \mu_n \quad \text{lösen.}$$

Durch Einsetzen der Randwerte folgt dann

$$y_n(x) = C_1 e^{-x}\cos(\mu_n x) + C_2 e^{-x}\sin(\mu_n x)$$

$$= a e^{-x}\sin(\mu_n x) \quad \text{mit} \quad C_1 = 0, \; C_2 = a \in \mathbb{R}$$

(Ob wir unser Fundamentalsystem als

$\phi_1(x) = e^{(-1+\mu)x}$, $\phi_2(x) = e^{(-1-\mu)x}$

oder

$\phi_1(x) = e^{-x}\cos(x)$, $\phi_2(x) = e^{-x}\sin(x)$

schreiben macht keinen Unterschied.)