TU Dortmund 22.01.2024

Höhere Mathematik III (P/ET/IT/MP/I-I)

Probeklausur

Wintersemester 2023/24

Prof. Dr. B. Schweizer M.Sc. Tim Schubert

Aufgabe 1. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f\colon D \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$. Wir schreiben $f = u + \mathrm{i}v$ mit $u, v\colon D \to \mathbb{R}$.

a) Wann nennt man f in z_0 *komplex differenzierbar*?

b) Wann nennt man f in D *holomorph*?

c) Formulieren Sie die *Cauchy-Riemann Differentialgleichungen*.

Aufgabe 2. Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ offen, $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ und $v \in C^1(M, \mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie

$$\operatorname{div}(f\, v) = \nabla f \cdot v + f \operatorname{div}(v)\,.$$

Aufgabe 3. Formulieren Sie den

a) *Cauchy-Integralsatz.*

b) *Satz von Liouville.*

Aufgabe 4. Es sei V ein reeller Vektorraum versehen mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}$. Weiter sei $\| \cdot \|$ die von dem Skalarprodukt induzierte Norm. Zeigen Sie für alle Vektoren $u, v \in V$ mit $\|u\| = \|v\| = 1$ die Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$|\langle u, v \rangle| \leq 1\,.$$

Aufgabe 5. Wir betrachten $B_3(0) \subset \mathbb{C}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial B_3(0)} \frac{e^{2z}}{z(z-1)^2}\, \mathrm{d}z\,.$$

Aufgabe 6. Gegeben seien die Fläche

$$F := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\,,\; x_2 \geq 0\,,\; x_3 \geq 0 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$v \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2\,,\, x_2 x_3\,,\, x_1 x_3)\,.$$

Berechnen Sie für einen Einheitsnormalenvektor n an F das Integral

$$\int_F \operatorname{rot}(v) \cdot n \, \mathrm{d}S$$

a) direkt.

b) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

Hinweis: Benutzen Sie Kugelkoordinaten mit $r = 1$:

$$\phi(\varphi, \theta) = (\cos(\varphi)\cos(\theta)\,,\, \sin(\varphi)\cos(\theta)\,,\, \sin(\theta))\,, \qquad \varphi \in [0, 2\pi)\,, \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\,.$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten der Funktion

$$f \colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ \cos(x) & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}\,.$$

Hinweis: Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x-y) + \cos(x+y) = 2\cos(x)\cos(y)\,,$$
$$\sin(x-y) + \sin(x+y) = 2\sin(x)\cos(y)\,.$$

Aufgabe 8. Wir betrachten für $\mu \in \mathbb{C}$ und $x \in [0, \pi]$ das Rand-Eigenwertproblem

$$-(y'' + 2y' + y) = \mu^2 y\,,$$
$$y(0) = 0\,, \quad y(\pi) - y'(\pi) = 0\,.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Rand-Eigenwertproblems.