Blatt 9 06.12.2023

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik III (P/ET/IT/MP/I-I)

Wintersemester 2023/24

Prof. Dr. B. Schweizer M.Sc. Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen.

Die Aufgaben 9.1, 9.2 und 9.3 sind schriftlich zu bearbeiten.

Aufgabe 9.1. [Inverse Laplace-Transformation] Wir betrachten für zulässiges $\lambda \in \mathbb{C}$ die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C},\ t \mapsto e^{\lambda t}$ mit Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s-\lambda}\,.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Residuensatzes die Formel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \mathrm{CH} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{s+\mathrm{i}y-\lambda}\, e^{t(s+\mathrm{i}y)}\,\mathrm{d}y\,.$$

Aufgabe 9.2. [Cauchy-Schwarzsche Ungleichung]

a) Es sei V ein reeller Vektorraum versehen mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}$. Weiter sei $\|\cdot\|$ die von dem Skalarprodukt induzierte Norm. Zeigen Sie für alle Vektoren $u, v \in V$ die Cauchy-Schwarze Ungleichung

$$|\langle u,v\rangle| \le \|u\|\,\|v\|$$

  (i) für normierte Vektoren $u, v \in V$ mit $\|u\| = \|v\| = 1$,

  (ii) für allgemeine Vektoren $u, v \in V$.

b) Es seien $a_k \in \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)^2 \le C \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\, k^2\,.$$

Aufgabe 9.3. [Ein nicht vollständiger metrischer Raum] Wir betrachten den Vektorraum

$$\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R}) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; x_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\,,\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$$

und die Norm $\|\cdot\|_{\ell^2} = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$. Zeigen Sie, dass $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{\ell^2}$ nicht vollständig ist.

Aufgabe 9.4. [Matrixnormen] Es sei $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\|\cdot\|_\infty \colon \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R},\ \|A\|_\infty := \max_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} |a_{ij}|\,,$$

$$\|\cdot\|_2 \colon \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R},\quad \|A\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}\,,$$

$$\|\cdot\| \colon \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R},\quad \|A\| := \max_{\|x\|_{\mathbb{R}^m}=1} \|Ax\|_{\mathbb{R}^n}$$

Normen auf $\mathbb{R}^{n\times m}$ erklären.

b) Zeigen Sie, dass die Normen $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_2$ auf $\mathbb{R}^{n\times m}$ äquivalent sind.

Aufgabe 9.5. [Ladung im elektrischen Schwingkreis] Bestimmen Sie die Ladung Q im elektrischen Schwingkreis

$$Q''(t) + 2Q'(t) + 5Q(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [1,2]\,, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit den Anfangsbedingungen $Q(0) = Q'(0) = 0$ mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Abgabe am 13.12.2023 bis 14:00 Uhr online auf Moodle.