

Übungen zur Vorlesung
Höhere Mathematik III (P/ET/IT/MP/I-I)
Wintersemester 2023/24

Prof. Dr. B. Schweizer

M.Sc. Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen.

Die Aufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 sind schriftlich zu bearbeiten.

Aufgabe 7.1. [Laurentreihen] Entwickeln Sie die Funktion

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) := \frac{1}{z^2 + 4z + 3}$$

in eine Laurentreihe auf den Gebieten

- a) $B_1(0)$,
- b) $B_{1<3}(0) := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\}$.

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- (i) Zeigen Sie, dass f folgende Partialbruchzerlegung besitzt:

$$f(z) = \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{2(z+3)}.$$

- (ii) Entwickeln Sie die Summanden des Partialbruches mit Hilfe der geometrischen Reihe. Unterscheiden Sie für $z \in \mathbb{C}$ dafür die zwei Fälle $|z| < 1$ und $1 < |z| < 3$.

Aufgabe 7.2. [Isolierte Singularitäten] Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f_i: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die isolierten Singularitäten und deren Typ:

- a) $f_1(z) = \frac{z}{e^z - 1}$,
- b) $f_2(z) = \frac{1 - e^z}{1 + e^z}$,
- c) $f_3(z) = \frac{1}{\sin(z) + \cos(z)}$,
- d) $f_4(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$.

Aufgabe 7.3. [Residuen] Berechnen Sie folgende Residuen:

- a) $\operatorname{Res}\left(ze^{\frac{1}{z}}; 0\right)$.
- b) $\operatorname{Res}\left(\cos\left(\frac{1}{z}\right); 0\right)$.
- c) $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3-z^2}; 1\right)$.

Aufgabe 7.4. [Regel von de l'Hospital] Es seien $M \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g: M \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Für ein $z_0 \in M$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gelte

$$g(z_0) = g'(z_0) = \cdots = g^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad g^{(n)}(z_0) \neq 0,$$
$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Wir setzen $R(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

- a) Falls $m < n$ gilt, so hat $R(z)$ eine Polstelle der Ordnung $n - m$ in z_0 .
- b) Falls $m \geq n$ gilt, so hat $R(z)$ eine hebbare Singularität in z_0 und es gilt die *Regel von de l'Hospital*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} R(z) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n)}(z_0)}.$$

Aufgabe 7.5. [Residuen] Berechnen Sie folgende Residuen:

- a) $\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{(z-1)^3}; 1\right)$.
- b) $\operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}; i\right)$.
- c) $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^8-1}; 1\right)$.

Abgabe am 29.11.2023 bis 14:00 Uhr online auf Moodle.