Blatt 6 15.11.2023

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik III (P/ET/IT/MP/I-I)

Wintersemester 2023/24

Prof. Dr. B. Schweizer M.Sc. Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen.

Die Aufgaben 6.1, 6.2 und 6.3 sind schriftlich zu bearbeiten.

Aufgabe 6.1. [Möbiustransformation] Wir nennen eine rationale Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{mit } a,b,c,d \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad ad - bc \neq 0$$

eine *Möbiustransformation*. Zeigen Sie, dass die Menge der Möbiustransformationen $\mathrm{Moeb}(\mathbb{C})$ mit der Komposition von Funktionen eine Gruppe bilden. Zeigen Sie dafür folgende Aussagen:

a) Die Komposition $g \circ f$ zweier Möbiustransformationen $f, g \in \mathrm{Moeb}(\mathbb{C})$ mit

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{und} \qquad g(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

ist wieder eine Mobiustransformation.

b) Für alle Möbiustransformationen $f \in \mathrm{Moeb}(\mathbb{C})$ mit $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ existiert eine Möbiustransformation $\phi \in \mathrm{Moeb}(\mathbb{C})$ mit

$$f \circ \phi = \phi \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}\,.$$

Aufgabe 6.2. [Integralformeln und Integralsatz von Cauchy]

a) Für $r > 0$ werde der Kreis $B_r(0)$ gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen. Berechnen Sie mit Hilfe der Integralformeln von Cauchy folgendes Integral:

$$\int_{\partial B_2(0)} \frac{e^z}{z(z+3\mathrm{i})^3}\,\mathrm{d}z\,.$$

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Integralsatzes von Cauchy folgendes Integral:

$$\int_{|z+1|=1} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)}\,\mathrm{d}z\,.$$

Aufgabe 6.3. [Komplexes Kurvenintegral] Berechnen Sie das komplexe Kurvenintegral

$$\int\limits_{\partial B_1(0)} \bar{z} \, \mathrm{d}z \,.$$

Aufgabe 6.4. [Komplexe Stammfunktion] Es sei $z_1 \in \mathbb{C}$ und $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = tz_1$. Berechnen Sie für die Funktionen

a) $f_1\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$,

b) $f_2\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto e^z$,

c) $f_3\colon : \mathbb{C} \setminus \{z = x + 0\mathrm{i} \in \mathbb{C} \mid x \leq 0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \log(z)$

eine komplexe Stammfunktion F_i mit Wegen, also durch

$$F_i(z_1) = \int_\gamma f_i(z) \, \mathrm{d}z \,.$$

Aufgabe 6.5. [Flächeninhalt von beschränkten Gebieten]

a) Es sei $M \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, das die Voraussetzungen des Satzes von Gauß erfüllt, mit Randkurve Γ. Zeigen Sie, dass der Fächeninhalt $\mathrm{vol}_2(M)$ von M gegeben ist durch
$$\int_M 1 \, \mathrm{d}x =: \mathrm{vol}_2(M) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \int_\Gamma \bar{z} \, \mathrm{d}z \,.$$

b) Es sei der Rand der Ellipse E gegeben durch
$$\partial E = \{z = \cos(\varphi) + 3\sin(\varphi)\mathrm{i} \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \subset \mathbb{C} \,.$$
Berechnen Sie
$$\int_{\partial E} \bar{z} \, \mathrm{d}z \,.$$
Berechnen Sie damit den Flächeninhalt der Ellipse E.

Abgabe am 22.04.2023 bis 14:00 Uhr online auf Moodle.