Blatt 5 08.11.2023

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik III (P/ET/IT/MP/I-I)

Wintersemester 2023/24

Prof. Dr. B. Schweizer M.Sc. Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen.

Die Aufgaben 5.1, 5.2 und 5.3 sind schriftlich zu bearbeiten.

Aufgabe 5.1. [Kettenregel für komplex differenzierbare Funktionen] Es seien $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $z_0 \in \mathbb{C}$ und $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $f(z_0) \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $g \circ f$ in $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist und die Kettenregel

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

gilt, indem Sie

a) einen Beweis wie im reellen führen.

b) die Funktionen f, g als Funktionen im $\mathbb{R}^2$ auffassen und die mehrdimensionale Kettenregel verwenden.
Hinweis: Welche Eigenschaft muss die Matrix $D(g \circ f)(z_0)$ besitzen, damit $g \circ f$ komplex differenzierbar in $z_0 \in \mathbb{C}$ ist?

Aufgabe 5.2. [Komplexe Exponentialfunktion] Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit

a) $\exp(z) = 0\,,$

a) $\exp(z) = 1\,,$

a) $\sin(z) = 0\,,$

a) $\sin(z) = 1\,,$

a) $\sin(z) = 2\,.$

Aufgabe 5.3. [Komplexer Sinus hyperbolicus] Als Zweige der Wurzelfunktion und der Logarithmusfunktion zum Schnitt $\Gamma_{-\pi}$ verwenden wir in dieser Aufgabe für $z = |z|e^{\mathrm{i}\phi}$ mit $-\pi < \phi < \pi$

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{\frac{\mathrm{i}\phi}{2}} \qquad \text{und} \qquad \log(z) = \ln(|z|) + \mathrm{i}\phi\,.$$

a) Zeigen Sie, dass die auf dem Gebiet $M := \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}y \mid y \in \mathbb{R},\ |y| \geq 1\}$ definierte Funktion

$$g\colon M \to \mathbb{C}, \quad g(z) := \log(z + \sqrt{z^2+1})$$

wohldefiniert und injektiv ist.

b) Zeieg Sie, dass g die Umkehrfunktion des komplexen Sinus hyperbolicus

$$\sinh\colon \mathbb{C} \to M, \quad \sinh(z) = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right)$$

ist.

Aufgabe 5.4. [Möbiustransformation] Bestimmen Sie eine Möbiustransformation f mit $f(\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$, $f(1) = 1$ und $f(-\mathrm{i}) = \mathrm{i}$.

Aufgabe 5.5. [Komplexes Kurvenintegral] Es sei $M := \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ und die Kurve Γ parametrisiert durch

$$\gamma\colon [-\pi, 3\pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = \begin{cases} 1 + e^{\mathrm{i}t} & \text{für } -\pi \leq t < \pi \\ -1 + e^{-\mathrm{i}(t-\pi)} & \text{für } \pi \leq t \leq 3\pi \end{cases}.$$

Berechnen Sie

$$\int_\Gamma \frac{1}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$$

mit Hilfe

a) der Definition des komplexen Kurvenintegrals.

a) des Integralsatzes und der Integralformel von Cauchy.

Abgabe am 15.11.2023 bis 14:00 Uhr online auf Moodle.