Blatt 4 01.11.2023

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik III (P/ET/IT/MP/I-I)

Wintersemester 2023/24

Prof. Dr. B. Schweizer M.Sc. Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen.

Die Aufgaben 4.1, 4.2 und 4.3 sind schriftlich zu bearbeiten.

Aufgabe 4.1. [Holomorphe Funktionen] Wir betrachten die Funktionen $f_i\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Untersuchen Sie, in welchen Punkten $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ die Funktionen f_i komplex differenzierbar sind.

a) $f_1(x + \mathrm{i}y) := x^2 y + \mathrm{i}y^2 x$,

b) $f_2(x + \mathrm{i}y) := e^{\mathrm{i}xy}$,

c) $f_3(x + \mathrm{i}y) := y \sin(x^2) + \mathrm{i}x$,

d) $f_4(z) := \mathrm{Re}(z)$,

e) $f_5(z) := \mathrm{Im}(z)$.

Aufgabe 4.2. [Komplexe Kurvenintegrale] Wir betrachten den Rand des Einheitskreises $\Gamma := \partial B_1(0)$ parametrisiert durch

$$\gamma\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{C},\ t \mapsto e^{\mathrm{i}t} .$$

Berechnen Sie für

a) $f_1\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = z^2$,

b) $f_2\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ f(z) = z^{-1}$,

c) $f_3\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ f(z) = z^{-2}$

das komplexe Kurvenintegral $\int_\Gamma f_i(z)\,\mathrm{d}z$.

Aufgabe 4.3. Es seien $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $\Gamma = \partial D$ parametrisiert durch eine geschlossene Kurve $\gamma \in C^1([0,1], \mathbb{R}^2)$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$$

eine komplex differenzierbare Funktion. Zeigen Sie

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Hinweis: Nutzen Sie die folgende Rechnung aus der Vorlesung:

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \cdot \tau\,.$$

Aufgabe 4.4. [Harmonische Funktionen] Gegeben seien $a \in \mathbb{R}$ und

$$u_a\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ u_a(x,y) := e^{2y}\cos(ax)\,.$$

a) Bestimen Sie a so, dass u_a harmonisch ist.

b) Geben Sie für die in a) bestimmten Werte a eine holomorphe Funktion $f_a\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an, die u_a als Realteil hat. Bestimmen Sie also f_a so, dass $\mathrm{Re}\,(f_a(x + \mathrm{i}y)) = u_a(x,y)$ gilt.

Abgabe am 08.11.2023 bis 14:00 Uhr online auf Moodle.