Blatt 3 25.10.2023

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik III (P/ET/IT/MP/I-I)

Wintersemester 2023/24

Prof. Dr. B. Schweizer M.Sc. Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen.

Die Aufgaben 3.1, 3.2 und 3.3 sind schriftlich zu bearbeiten.

Aufgabe 3.1. [Integralsatz von Stokes] Gegeben sei die Fläche

$$F := \left\{(x_1, x_2, x_1 + x_2) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 \leq 4\right\}.$$

Die Orientierung sei so gewählt, dass der Flächennormalenvektor $n(x_1, x_2, x_3)$ an F eine positive x_3-Komponente hat. Das Vektorfeld $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$v(x_1, x_2, x_3) := (x_1 + x_2\,,\ x_2\,,\ x_3)\,.$$

Berechnen Sie für die Randkurve γ von F

$$\int_\gamma v \cdot \mathrm{d}x$$

a) direkt.

b) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

Aufgabe 3.2. [Flächeninhalt eines n-Ecks] Gegeben sei im $\mathbb{R}^2$ das unregelmäßige n-Eck mit den im Gegenuhrzeigersinn nummerierten Eckpunkten

$$(x_0, y_0)\,,\ (x_1, y_1)\,,\ \ldots\,,\ (x_{n-1}, y_{n-1})\,,\ (x_n, y_n) = (x_0, y_0)\,.$$

Zeigen Sie mit dem Integralsatz von Gauss, dass der Flächeninhalt F des n-Ecks gegeben ist durch

$$F = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_k y_{k+1} - y_k x_{k+1})\,.$$

Aufgabe 3.3. [Flächeninhalt eines Gebietes] Es sei für $r > 0$ das Gebiet M gegeben, das von der Kurve $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (r\cos^3(t)\,,\ r\sin^3(t))$ berandet wird. Berechnen Sie den Fächeninhalt $\mathrm{vol}_2(M) = \int_M 1\,\mathrm{d}x$ von M.

Aufgabe 3.4. [Helmholtz-Zerlegung] Wir betrachten stetige Vektorfelder $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Können wir das Vektorfeld v schreiben als

$$v = \operatorname{rot}(w) + \nabla f \tag{*}$$

für Funktionen $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und $w \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit $\nabla \cdot w = 0$, so nennen wir (*) eine *Helmholtz-Zerlegung* von v.
Bestimmen Sie eine *Helmholtz-Zerlegung* des Vektorfeldes $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$v(x_1, x_2, x_3) := (x_1 x_2\,,\; x_2 x_3\,,\; x_1 x_3)\,.$$

Hinweis: Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation von v, um Informationen über f und w zu erhalten.

Aufgabe 3.5. [Greensche Integralformel] Gegeben seien das Gebiet

$$M := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\right\}$$

und die Funktion $g\colon \overline{M} \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial M} \frac{\partial g}{\partial n}\,\mathrm{d}S$$

a) mit Hilfe der Definition.

b) mit Hilfe der Greenschen Integralformel.

Abgabe am 01.11.2023 bis 14:00 Uhr online auf Moodle.