Blatt 2 18.10.2023

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik III (P/ET/IT/MP/I-I)

Wintersemester 2023/24

Prof. Dr. B. Schweizer M.Sc. Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen.

Die Aufgaben 2.1, 2.2 und 2.3 sind schriftlich zu bearbeiten.

Aufgabe 2.1. [Potential] Gegeben seien $G := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 > 0\,, x_3 > 0\}$ und $v_\beta \colon G \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$v_\beta(x_1, x_2, x_3) := \left(\ln(x_2 x_3)\,,\ \frac{x_1}{x_2}\,,\ \beta\frac{x_1}{x_3}\right) \qquad \text{für } \beta \in \mathbb{R}\,.$$

a) Für welche Werte von $\beta \in \mathbb{R}$ besitzt v_β ein Potential $f_\beta \colon G \to \mathbb{R}$?

b) Bestimmen Sie für diese Werte von $\beta \in \mathbb{R}$ jeweils ein Potential $f_\beta \colon G \to \mathbb{R}$ mit $f_\beta(0, 1, 1) = 0$.

Aufgabe 2.2. [Integralsatz von Gauß] Gegeben seien $v \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$v(x_1, x_2, x_3) := \left(x_1 x_2^2 x_3\,,\ -x_1^2 x_2 x_3\,,\ x_3\right)\,.$$

Die Fläche F sei über $B := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ parametrisiert durch

$$\phi \colon B \to \mathbb{R}^3,\ \phi(x_1, x_2) = (x_1\,,\ x_2\,,\ h(x_1, x_2))$$

mit Höhenfunktion $h(x_1, x_2) := -(x_1^2 + x_2^2)$. Die Fläche F_U sei $B \times \{-1\}$.

a) Beschreiben und skizzieren Sie die Flächen F und F_U.

b) Berechnen Sie für die Flächen F und F_U die Normalenvektoren n und n_U. Berechnen Sie damit

$$\int_F v \cdot n \,\mathrm{d}S \qquad \text{und} \qquad \int_{F_\mathrm{U}} v \cdot n_\mathrm{U} \,\mathrm{d}S\,.$$

Folgern Sie daraus den Fluss des Feldes v durch $F \cup F_\mathrm{U}$.

c) Berechnen Sie den Fluss des Feldes v durch $F \cup F_\mathrm{U}$ mit dem Integralsatz von Gauß.

Aufgabe 2.3. [Greensche Integralformel] Es seien $\gamma\colon [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$ und $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\begin{aligned} \gamma(t) &:= (\cos(t)\,,\, \sin(t))\,, \\ v(x_1,x_2) &:= \left(e^{\sin(x_1)} - x_2^3\,,\, x_1^3 - 2^{x_2}\right)\,. \end{aligned}$$

Berechnen Sie das vektorielle Kurvenintegral

$$\int_\gamma v \cdot \mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe 2.4. [Vektorpotential] Gegeben sei das Vektorfeld $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$v(x_1,x_2,x_3) := (x_2 - x_3\,,\, x_3 - x_1\,,\, x_1 - x_2)\,.$$

Bestimmen Sie ein Vektorpotential $w\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ von v mit $w_3 \equiv 0$.

Aufgabe 2.5. [Integralsatz von Stokes] Es sei $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$v(x_1,x_2,x_3) := \left(3x_2\,,\, -x_1x_3\,,\, x_2x_3^2\right)\,.$$

Wir betrachten für

$$G := \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 \le 4\right\}$$

und

$$P := \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 \le 2x_3\,,\; 0 \le x_3 \le 2\right\}$$

mit Bodenfläche F_B und Deckelfläche F_D mit den Parametrisierungen

$$\begin{aligned} &\phi_D\colon G \to \mathbb{R}^3,\; \phi_D(x_1,x_2) = (x_1\,,\, x_2\,,\, 2)\,, \\ &\phi_B\colon G \to \mathbb{R}^3,\; \phi_M(x_1,x_2) = \left(x_1\,,\, x_2\,,\, \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right) \end{aligned}$$

Berechnen Sie für den äußeren Einheitsnormalenvektor n an P

$$\int_{F_D} \operatorname{rot}(v) \cdot n \,\mathrm{d}S \qquad \text{und} \qquad \int_{F_M} \operatorname{rot}(v) \cdot n \,\mathrm{d}S$$

a) direkt.

b) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

Abgabe am 25.10.2023 bis 14:00 Uhr online auf Moodle.