

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik III (P/ET/IT/MP/I-I)

Wintersemester 2023/24

Prof. Dr. B. Schweizer

M.Sc. Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen.

Die Aufgaben 13.1, 13.2 und 13.3 sind schriftlich zu bearbeiten.

Aufgabe 13.1. [Eindeutige Lösung eines Randwertproblems] Untersuchen Sie, ob das folgende Randwertproblem eindeutig lösbar ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls eine Lösung:

$$\begin{aligned}y'' - 2y' + y &= x, & 0 \leq x \leq 1, \\y(0) + y'(0) &= 4, & y'(1) = 0.\end{aligned}$$

Aufgabe 13.2. [Rand-Eigenwertproblem] Wir betrachten für $\mu \in \mathbb{C}$ und $x \in [0, 1]$ das homogene Rand-Eigenwertproblem

$$\begin{aligned}y'' - 2y' + y &= \mu y, \\y(0) &= 0, & y(1) = 0.\end{aligned}$$

- Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Rand-Eigenwertproblems.
- Überprüfen Sie, ob die Eigenfunktionen orthogonal bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)e^{-2x} dx$$

sind.

Aufgabe 13.3. [Diffusionsgleichung] Bestimmen Sie für $(x, t) \in [0, 2\pi] \times [0, \infty)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}\partial_t u - 9\partial_x^2 u &= 0, \\ \partial_x u(0, t) = \partial_x u(2\pi, t) &= 0, & u(x, 0) = 1 - \cos(2x).\end{aligned}$$

Aufgabe 13.4. [Eigenwertproblem] Wir betrachten für $\mu \in \mathbb{C}$ und $x \in [0, \pi]$ das homogene Rand-Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} -y'' - 10y' &= \mu y, \\ 5y(0) + y'(0) &= 0, \quad 5y(\pi) + y'(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Rand-Eigenwertproblems.

Aufgabe 13.5. [Wellengleichung] Bestimmen Sie für $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u &= 3e^{x-2t}, \\ u(x, 0) &= e^x, \quad \partial_t u(x, 0) = -2e^x. \end{aligned}$$

Abgabe am 24.01.2024 bis 14:00 Uhr online auf Moodle.