

## Übungen zur Vorlesung

## Höhere Mathematik III (P/ET/IT/MP/I-I)

Wintersemester 2023/24

Prof. Dr. B. Schweizer

M.Sc. Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen.

**Die Aufgaben 12.1, 12.2 und 12.3 sind schriftlich zu bearbeiten.**

**Aufgabe 12.1.** [Fourierreihe einer Faltung] Wir betrachten die Funktion  $\tilde{f}: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $\tilde{f}(t) := 0$  für  $-\pi < t < 0$  und  $\tilde{f}(t) := 1$  für  $0 \leq t < \pi$  mit  $2\pi$ -periodischer Fortsetzung  $f$ . Die Funktion  $f$  besitzt die komplexe Fourierreihe

$$f^*(t) = \frac{1}{2} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{i}{\pi(2n-1)} e^{i(2n-1)t}.$$

Berechnen Sie die komplexe Fourierreihe der Faltung  $f * f$ 

- a) direkt,
- b) mit dem Faltungssatz.

**Aufgabe 12.2.** [Gaußsche Glockenkurve] Es sei  $\sigma > 0$  und  $G_\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die *Gaußsche Glockenkurve* definiert durch

$$G_\sigma(t) := \frac{1}{\sqrt{\sigma\pi}} e^{-\frac{t^2}{\sigma}}.$$

Berechnen Sie für  $\rho > 0$  die Faltung  $G_\sigma * G_\rho$ .

**Aufgabe 12.3.** [Randwertproblem] Bestimmen Sie die Lösung des Randwertproblems

$$y'' - 2y' + y = e^t, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

**Aufgabe 12.4.** [Eigenwertproblem] Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Eigenwertproblems

$$y'' + 4y' + 6y = -\lambda y, \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

**Aufgabe 12.5.** [Faltungen] Wir betrachten die Funktionen  $f_i: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f_1(t) := \sin(t), \quad f_2(t) := \cos(t), \quad f_3(t) := \sin(2t).$$

Berechnen Sie die Faltungen

a)  $f_1(t) * f_1(t)$ ,

b)  $f_1(t) * f_2(t)$ ,

c)  $f_1(t) * f_3(t)$

sowohl direkt, als auch mit dem Faltungssatz.

---

---

Abgabe am 17.01.2024 bis 14:00 Uhr online auf Moodle.