Blatt 11 20.12.2023

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik III (P/ET/IT/MP/I-I)

Wintersemester 2023/24

Prof. Dr. B. Schweizer M.Sc. Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen.

Die Aufgaben 11.1, 11.2 und 11.3 sind schriftlich zu bearbeiten.

Aufgabe 11.1. [Fourierkoeffizienten einer Indikatorfunktion] Es sei $a \in [0, 2\pi]$. Berechnen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten der Funktion

$$f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x < a \\ 0 & \text{für } a \le x < 2\pi \end{cases} .$$

Aufgabe 11.2. [Fourierkoeffizienten einer Sprungfunktion] Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi \le x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

und die *verallgemeinerte Funktion* $g := 2\delta_\pi - 2\delta_0$ definiert durch die Relation

$$\langle g, f\rangle = 2f(\pi) - 2f(0) \quad \text{für alle } f \in C^0([-\pi, \pi]) .$$

a) Bestimmen Sie die Fourierreihe von f und formal die Fourierreihe von g.

b) Bestimmen Sie die Ableitung der Fourierreihe von f und vergleichen Sie diese mit der Fourierreihe von g.

Aufgabe 11.3. [Entwicklung in Sinusreihe] Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [0, \pi) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin\left(\frac{3x}{2}\right) .$$

a) Setzen Sie die Funktion f zu einer 2π-periodischen Funktion $\tilde{f}$ fort, sodass $\tilde{f}$ eine Entwicklung in eine reine Sinusreihe besitzt. Berechnen Sie die Sinusreihe.
Hinweis: Verwenden Sie das Additionstheorem

$$\sin(x) \cdot \sin(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x - y) - \cos(x + y)\right) \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R} .$$

b) Untersuchen Sie die punktweise Konvergenz und die Konvergenz in der $\|\cdot\|_2$-Norm der Sinusreihe aus Teilaufgabe a).

Aufgabe 11.4. [Vollständigkeitsrelation]

a) Sei $f \in L^2([0,2\pi])$ und $e_k\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C},\ e_k(x) := e^{\mathrm{i}kx}$ für $k \in \mathbb{Z}$. Die Funktion f habe die komplexen Fourierkoeffizienten c_k für $k \in \mathbb{Z}$ und die Fourierpartialsumme

$$S_N[f](t) := \sum_{k=-N}^{N} c_k\, e_k(t)\,.$$

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\|f - S_N[f]\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2\,.$$

b) Sei $f \in L^2([0,2\pi])$ eine Treppenfunktion. Dann gilt die *Konvergenz im quadratischen Mittel*

$$\lim_{N\to\infty} \|f - S_N[f]\|_2^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - S_N[f](t)|^2 \,\mathrm{d}t = 0\,.$$

c) Sei $f \in L^2([0,2\pi])$. Dann gilt $\lim\limits_{N\to\infty} \|f - S_N[f]\|_2^2 = 0$.

Abgabe am 10.01.2024 bis 14:00 Uhr online auf Moodle.

Das gesamte Team der *höheren Mathematik III* wünscht Ihnen schöne Feiertage und einen guten Rutsch in das neue Jahr.