

Übungen zur Vorlesung
Höhere Mathematik III (P/ET/IT/MP/I-I)
Wintersemester 2023/24

Prof. Dr. B. Schweizer

M.Sc. Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen.

Die Aufgaben 10.1, 10.2 und 10.3 sind schriftlich zu bearbeiten.

Aufgabe 10.1. [Orthonormalsystem] Wir betrachten den Vektorraum

$$Z := \{f \in C([- \pi, \pi]) \mid f(t) = a + b \cos(t) + c \sin(2t), \ a, b, c \in \mathbb{R}, \ t \in [- \pi, \pi]\}$$

zusammen mit dem in $C([- \pi, \pi])$ definierten Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) dt \quad \forall f, g \in Z.$$

Wir bezeichnen mit $\|\cdot\|$ die von dem Skalarprodukt induzierte Norm:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad \forall f \in Z.$$

- a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von Z .
- b) Geben Sie die orthogonale Projektion $P(f)$ von f mit $f(t) = t \cos(2t)$ auf Z an.
- c) Berechnen Sie den Fehler $\|f - P(f)\|$.

Aufgabe 10.2. [Reelle und komplexe Fourierreihen] Wir betrachten die π -periodische Funktion f und 2π -periodische Funktion g definiert durch

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto \cos^2(x), \quad g: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto x^2.$$

- a) Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von f .
Hinweis: Verwenden Sie das Additionstheorem

$$\cos(x)^2 = \frac{\cos(2x) + 1}{2}.$$

- b) Berechnen Sie die komplexe Fourierreihe von g .

Aufgabe 10.3. [Periodische Fortsetzung] Wir betrachten die Funktion

$$f: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x.$$

- a) Setzen Sie f zu einer ungeraden 4-periodischen Funktion auf \mathbb{R} fort und berechnen Sie die zu f gehörige Fourierreihe.
- b) Geben Sie die Fourierreihe der Funktion

$$g: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

an, indem Sie die Reihe aus a) integrieren.

Aufgabe 10.4. [Komplexe Fourierreihe] Berechnen Sie die komplexe Fourierreihe der π -periodischen Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |\sin(x)|.$$

Aufgabe 10.5. [Reelle Fourierreihe einer stückweise definierten Funktion] Bestimmen Sie die reellen Fourierkoeffizienten der 2π -periodischen Funktion

$$f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x^2 & x \in [0, \pi] \\ 2\pi - x & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}.$$

Abgabe am 20.04.2023 bis 14:00 Uhr online auf Moodle.