Blatt 1 11.10.2023

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik III (P/ET/IT/MP/I-I)

Wintersemester 2023/24

Prof. Dr. B. Schweizer M.Sc. Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen.

Die Aufgaben 1.1, 1.2 und 1.3 sind schriftlich zu bearbeiten. Aufgaben 1.4 und 1.5 werden in der Globalübung am 18.10.2023 diskutiert.

Aufgabe 1.1. [Konvergenzordnung] Es sei $[t_0, T] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und für ein $C_f > 0$ gelte $\sup\limits_{t,y} |f(t,y)| + |Df(t,y)| \leq C_f$. Weiter sei $y \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)) \qquad \forall\, t \in [t_0, T], \qquad y(t_0) = y_0 \,.$$

Für $k \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $t_{k+1} := t_0 + (k+1)h$ und untersuchen das explizite Euler-Verfahren

$$y_{k+1} := y_k + hf(t_k, y_k) \,.$$

Zeigen Sie, dass das Verfahren die Konsistenzordnung 1 hat, also, dass eine Konstante $C > 0$ existiert mit

$$\max_{k \in \mathbb{N}_0} |y_k - y(t_k)| \leq Ch \,.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) (Glattheit der Lösung) Zeigen Sie, dass eine Konstante $C_1 > 0$ existiert mit

$$\max_{t \in [t_0, T]} |y''(t)| \leq C_1 \,.$$

Folgern Sie daraus, dass eine Konstante $C_2 > 0$ existiert mit

$$|y(t_{k+1}) - y(t_k) - hy'(t_k)| \leq C_2 h^2 \,.$$

b) (Fehlerwachstum) Zeigen Sie, dass eine Konstante $C_3 > 0$ existiert mit

$$|y_{k+1} - y(t_{k+1})| \leq (1 + C_3 h)\, |y_k - y(t_k)| + C_3 h^2 \,.$$

c) Folgern Sie für alle $k \in \mathbb{N}_0$:

$$|y_k - y(t_k)| \leq C_4 k h^2 \exp\left(k h C_3\right) \,.$$

Aufgabe 1.2. [Verkettung von Differentialoperatoren] Es seien $M \subset \mathbb{R}^3$ offen, $f \in C^2(M, \mathbb{R})$ und $v \in C^2(M, \mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) $\operatorname{rot}(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = 0$

b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = \nabla \cdot (\nabla \times v) = 0$

Aufgabe 1.3. [Produktregeln] Es seien $M \subset \mathbb{R}^3$ offen, $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ und $v \in C^1(M, \mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) $\operatorname{div}(f\, v) = \nabla f \cdot v + f \operatorname{div}(v)$

b) $\operatorname{rot}(f\, v) = (\nabla f) \times v + f \operatorname{rot}(v)$

Aufgabe 1.4. [Potentiale] Wir wiederholen die Aussagen 20.10 bis 20.13 aus dem Skript.

Es seien $M \subset \mathbb{R}^2$ ein sternförmiges Gebiet und $g \colon M \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) Es existiert ein Skalarfeld $F \colon M \to \mathbb{R}$ mit $\nabla F = g$.

b) Für zwei Punkte $P, Q \in M$ ist das vektorielle Kurvenintegral $\int_\gamma g \cdot \mathrm{d}x$ unabhängig von der gewählten Kurve γ, die die Punkte P, Q verbindet.

c) Es gilt
$$\nabla^\perp \cdot g := -\partial_2 g_1 + \partial_1 g_2 = 0\,.$$

Aufgabe 1.5. [Rotation in $\mathbb{R}^3$ und $\nabla^\perp$ in $\mathbb{R}^2$] Es seien $M \subset \mathbb{R}^2$ offen, $u \in C^2(M, \mathbb{R})$ und $w \in C^1(M, \mathbb{R}^2)$. Wir interpretieren w als ein Feld in $\mathbb{R}^3$: $\tilde{w} \colon M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\tilde{w}(x_1, x_2, x_3) = (w(x_1, x_2), 0)$ und ebenso $\tilde{u} \colon M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde{u}(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_2)$ Weiter setzen wir $v := (0, 0, \tilde{u})$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) $\nabla \times v(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\nabla^\perp u(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $\nabla \times \tilde{w}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \nabla^\perp \cdot w(x_1, x_2) \end{pmatrix}$.

c) $\nabla \times \nabla \times v(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Delta u(x_1, x_2) \end{pmatrix}$.

Abgabe am 18.10.2023 bis 12:00 Uhr online auf Moodle.