Blatt 9 31.05.2023

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik II (P, ETIT, AI, DS)

Sommersemester 2023

Prof. Dr. B. Schweizer Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen.

Die Aufgaben 9.1, 9.2 und 9.3 sind schriftlich zu bearbeiten.

Aufgabe 9.1. [Taylorpolynom] Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \exp(x)\sin(y)\,.$$

a) Berechnen Sie das zweite Taylorpolynom $T_2(x,y)$ im Punkt $(0,0)$.

b) Berechnen Sie das zweite Taylorpolynom $T_2(x,y)$ im Punkt $(0,0)$ mit Hilfe von Definition 13.17 aus dem Skript.

Aufgabe 9.2. [Lokale Minima und Sattelpunkte] Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = \exp\left(x^2 + 2xy\right) + \exp\left(z^2 - 2zy\right)\,.$$

Berechnen Sie alle lokalen Extrema bzw. Sattelpunkte von f.

Aufgabe 9.3. [Definitheit symmetrischer 2×2-Matrizen] Es sei

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$$

eine symmetrische 2×2-Matrix. Zeigen Sie direkt ohne Benutzung der Resultate aus der Vorlesung und dem Skript folgende Aussagen:

a) Die Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn $a > 0$ und $\det A > 0$ gilt.

b) Die Matrix A ist genau dann negativ definit, wenn $a < 0$ und $\det A > 0$ gilt.

c) Die Matrix A ist genau dann indefinit, wenn $\det A < 0$ gilt.

Aufgabe 9.4. [Mittelwertsatz für skalarwertige Funktionen] Gegeben seien eine total differenzierbare Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ mit $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und $a, b \in M$ mit $a \neq b$. Sei $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n,\ c(t) = a + t(b-a)$, sodass $c(t) \in M$ für alle $t \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass es einen Punkt $z \in \overline{ab} := \{a + t(b-a) \mid t \in [0,1]\}$ gibt mit

$$f(b) - f(a) = \nabla f(z)\,(b-a)\,.$$

Abgabe am 07.06.2023 bis 14:00 Uhr online.