Blatt 8 24.05.2023

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik II (P, ETIT, AI, DS)

Sommersemester 2023

Prof. Dr. B. Schweizer Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen.

Die Aufgaben 8.1, 8.2 und 8.3 sind schriftlich zu bearbeiten.

Aufgabe 8.1. [Toruskoordinaten] Es seien $r, R \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann betrachten wir die Funktion

$$\Phi \colon [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad \Phi(\theta, \varphi) := \begin{pmatrix} (R + r\cos(\theta))\cos(\varphi) \\ (R + r\cos(\theta))\sin(\varphi) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $D\Phi(\theta, \varphi)$ und berechnen Sie $D\Phi T(0, 0)$. Ist Φ total differenzierbar?

Aufgabe 8.2. [Richtungsableitung] Es seien $f, g \colon (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty) \times (0, \infty)$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{y} \\ \frac{y^2}{x} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(x, y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2 y \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie $D(g \circ f)$.

b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $a = (1, 1)$ in Richtung $v = (-1, 2)$ und von g im Punkt $b = (1, 0)$ in Richtung $w = (2, -1)$.

Aufgabe 8.3. [Totale Differenzierbarkeit] Es sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

a) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar ist und bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen.

b) Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0, 0)$ nicht stetig sind.
Hinweis: Betrachten Sie dafür $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0)$.

c) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}^2$ total differenzierbar ist.

Aufgabe 8.4. [Wellengleichung] Es seien $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen und $c \in \mathbb{R}$. Es sei $u\colon \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$u(x,t) := g(x - ct) + h(x + ct)$$

definiert. Zeigen Sie, dass u die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x}(x,t)$$

löst.

Abgabe am 31.05.2023 bis 14:00 Uhr online.