Blatt 7 17.05.2023

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik II (P, ETIT, AI, DS)

Sommersemester 2023

Prof. Dr. B. Schweizer Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen.

Die Aufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 sind schriftlich zu bearbeiten.

Aufgabe 7.1. [Teilmengen des $\mathbb{R}^2$] Skizzieren Sie die folgenden Mengen M_i und geben Sie jeweils ohne Beweis an, ob die Mengen offen, abgeschlossen, beschränkt oder kompakt sind.

a) $M_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}\,,$

b) $M_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x + y \geq 0\}\,,$

c) $M_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x^2 - y^2| \leq 10\}\,,$

d) $M_4 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > e^x\}\,,$

e) $M_5 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ x^3 \leq y \leq x^2\}\,.$

Aufgabe 7.2. [Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$] Es sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch die Vorschrift

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{|x| + y^2}}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0)\,, \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0)\,. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ für die f stetig ist.

Aufgabe 7.3. [Partielle Ableitungen] Differenzieren Sie die folgenden Funktionen einmal partiell nach allen ihren Variablen:

a) $f_1(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\,,$

b) $f_2(x, y, a, b) = a \sin(x) + b \cos(y)\,,$

c) $f_3(x, y) = \sqrt{\exp(x - y)}\,,$

d) $f_4(x, y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\,.$

Aufgabe 7.4. [Folgen im $\mathbb{R}^n$] Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

$$M \text{ ist abgeschlossen } \iff (M \ni x_k \longrightarrow x \text{ impliziert } x \in M).$$

Abgabe am 24.05.2023 bis 14:00 Uhr online.