Blatt 6 10.05.2023

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik II (P, ETIT, AI, DS)

Sommersemester 2023

Prof. Dr. B. Schweizer Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen.

Die Aufgaben 6.1, 6.2 und 6.3 sind schriftlich zu bearbeiten.

Aufgabe 6.1. [Berechnung uneigentlicher Integrale] Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^\infty t^2 e^{-t} \, \mathrm{d}t\,,$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} \, \mathrm{d}t\,,$

c) $\displaystyle\int_0^1 \ln(t) \, \mathrm{d}t\,,$ d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+t^3} \, \mathrm{d}t\,.$

Aufgabe 6.2. [Integralkriterium für Reihen] Es sei $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig und monoton fallend mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [1,\infty)$. Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir $a_k := f(k)$. Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty f(x) \, \mathrm{d}x$$

genau dann existiert, wenn die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert.

Aufgabe 6.3. [Konvergenz uneigentlicher Integrale] Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{d}t$$

konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.
Hinweis: Diese Aussage wurde in der Vorlesung schon skizzenhaft gezeigt.

Aufgabe 6.4. [Simpsonregel] Wir wollen $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ näherungsweise bestimmen. Dazu benutzen wir die Quadraturformel

$$I_2\left(f;[a,b]\right) = \omega_0 f(a) + \omega_1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \omega_2 f(b)\,.$$

Bestimmen Sie die Gewichte $\omega_0,\ \omega_1$ und ω_2 so, dass für Polynome zweiten Grades der Form $f(x) = rx^2 + px + q$ mit $r, p, q \in \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ gilt:

$$\int\limits_a^b f(x) = I_2\left(f;[a,b]\right)\ .$$

Abgabe am 17.05.2023 bis 14:00 Uhr online.