

## Übungen zur Vorlesung

## Höhere Mathematik II (P, ETIT, AI, DS)

Sommersemester 2023

Prof. Dr. B. Schweizer

Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen.

**Die Aufgaben 5.1, 5.2 und 5.3 sind schriftlich zu bearbeiten.****Aufgabe 5.1.** [Rechenregeln zur Integration] Es sei  $F'(x) = f(x)$ . Zeigen Sie folgende Rechenregeln für das unbestimmte Integral:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \int f(c+x) \, dx = F(c+x), \quad \text{b)} \quad \int f(c-x) \, dx = -F(c-x), \\ \text{c)} & \int f(-x) \, dx = -F(-x), \quad \text{d)} \quad \int f(\alpha x) \, dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x), \\ \text{e)} & \int \frac{g'(x)}{g(x)} \, dx = \ln(|g(x)|), \quad \text{f)} \quad \int g(x)g'(x) \, dx = \frac{1}{2}g(x)^2. \end{array}$$

**Aufgabe 5.2.** [Unbestimmtes Integral einer rationalen Funktion] Es seien  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  mit  $c, d > 0$  und  $c^2 < 4d$ .

a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{1}{x^2 + cx + d} \, dx.$$

**Hinweis:** Berechnen Sie für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha, \beta > 0$  die Ableitung der Funktion

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \arctan(\alpha x + \beta).$$

b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + cx + d} \, dx.$$

**Aufgabe 5.3.** [Integralrechnung] Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \int_{-1}^2 x\sqrt{x^2+5} \, dx, \\ \text{b)} & \int_0^1 \frac{\exp(2x) + \exp(4x)}{\exp(4x) + 9} \, dx, \\ \text{c)} & \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} \, dx, \\ \text{d)} & \int_0^x \frac{t^3}{t^8+t^4+1} \, dt. \end{array}$$

**Aufgabe 5.4.** [Flächeninhalte] Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a, b > 0$ . Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse

$$E := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

---

---

Abgabe am 10.05.2023 bis 14:00 Uhr online.