Blatt 4 26.04.2023

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik II (P, ETIT, AI, DS)

Sommersemester 2023

Prof. Dr. B. Schweizer Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen.

Die Aufgaben 4.1, 4.2 und 4.3 sind schriftlich zu bearbeiten.

Aufgabe 4.1. [Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus] Wir betrachten die Funktionen

$$\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \quad \text{und} \quad \cosh\colon \mathbb{R} \to [1,\infty),\ x \mapsto \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)\,.$$

a) Zeigen Sie mit einer Potenzreihenentwicklung um $x_0 = 0$, dass folgendes gilt:

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \quad \text{und} \quad \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\, x^{2n}\,.$$

b) Zeigen Sie, dass $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

c) Wir definieren die Umkehrfunktionen von sinh und $\cosh|_{[0,\infty)}$ durch

$$\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \operatorname{arsinh}(x) \quad \text{und} \quad \operatorname{arcosh}\colon [1,\infty) \to [0,\infty),\ x \mapsto \operatorname{arcosh}(x)\,.$$

Zeigen Sie, dass $\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ und $\operatorname{arcosh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in [0,\infty)$ gilt. Bestimmen Sie die Ableitungen von arsinh und arcosh.

Aufgabe 4.2. [Treppenfunktionen] Wir betrachten die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit

$$f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \frac{1}{n+1} \\ n(n+1), & \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 4.3. [Elementares Integral] Berechnen Sie mit Hilfe der Definition durch Treppenfunktionen das Integral $\int\limits_0^b x^3\,dx$ für beliebiges $b > 0$.

Verwenden Sie dazu die äquidistante Zerlegung $a_k = \dfrac{kb}{n}$ des Intervalls $[0, b]$ und die Treppenfunktionen

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{kb}{n}\right)^3 \text{ für } x \in [a_k, a_{k+1}),\ k = 0, 1, \dots, n-1\,.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Summenformel $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

Aufgabe 4.4. [Allgemeine Potenz]

a) Für $a > 0$ und $b = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ ist die *Potenz mit rationalem Exponenten* definiert durch

$$a^b := \sqrt[q]{a^p}\,, \tag{1}$$

wobei $\sqrt[q]{y} = x$ die Lösung von $x^q = y$ ist. Die *allgemeine Potenz* ist definiert durch

$$a^b := \exp(b \ln a)\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass in diesem Fall die beiden Definitionen aus (1) und (2) übereinstimmen.

Abgabe am 03.05.2023 bis 14:00 Uhr online.