

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik II (P, ETIT, AI, DS)

Sommersemester 2023

Prof. Dr. B. Schweizer

Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen.

Die Aufgaben 3.1, 3.2 und 3.3 sind schriftlich zu bearbeiten.

Aufgabe 3.1. [Polynom-Interpolation]

a) Es seien

$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \exp(x)$$

und $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ Punkte im Intervall $[-1, 1]$. Bestimmen Sie das Interpolationspolynom P_f von f zu den Stützstellen x_0 , x_1 und x_2 .

b) Es seien

$$g: [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

und $x_0 = -5$, $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$ und $x_5 = 5$ Punkte im Intervall $[-5, 5]$. Bestimmen Sie das Interpolationspolynom P_g von g zu den Stützstellen x_0 , x_1 , x_2 , x_3 , x_4 und x_5 .

c) Skizzieren Sie die Interpolationspolynome P_f und P_g .**Aufgabe 3.2.** [Newton-Verfahren] Gegeben sei

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^5 - 3x^2 + 1.$$

Bestimmen Sie eine Nullstelle von f im Intervall $I_1 = [-1, 0]$, $I_2 = [0, 1]$ und $I_3 = [1, 2]$. Gehen Sie dabei in jedem Intervall wie folgt vor:

- Nutzen Sie im Newton-Verfahren als Startwert den Mittelpunkt des Intervalls.
- Führen Sie die Iteration so lange durch, bis sich die achte Nachkommastelle der nachfolgenden Iteration einmal nicht ändert.

Aufgabe 3.3. [Potenzreihendarstellung] Bestimmen Sie für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ die Taylorreihendarstellung mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ der Funktionen $f(z) = \frac{1}{z-i}$ und $g(z) = \frac{1}{z+i}$.

Aufgabe 3.4. [Alternative Berechnung für den Konvergenzradius] Für die Koeffizienten der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ existiere ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Weiter gelte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = c.$$

Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius r gegeben ist durch $r = \frac{1}{c}$.

Abgabe am 26.04.2023 bis 14:00 Uhr online.