Blatt 13 28.06.2023

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik II (P, ETIT, AI, DS)

Sommersemester 2023

Prof. Dr. B. Schweizer Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen.

Die Aufgaben 13.1, 13.2 und 13.3 sind schriftlich zu bearbeiten.

Aufgabe 13.1. [Integrabilitätsbedingung und Potential] Es sei das Vektorfeld g gegeben durch

$$g\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\} \to \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass g die Integrabilitätsbedingung 20.12 (a) aus dem Skript erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass g kein Potential besitzt.
Hinweis: Finden Sie zwei Wege Γ_1 und Γ_2 von $(1,0)$ nach $(-1,0)$ mit unterschiedlichen vektoriellen Kurvenintegralen $\int\limits_{\Gamma_i} g \cdot \mathrm{d}(x,y)$ für $i = 1, 2$.

c) Wieso bilden die Resultate aus Teilaufgabe a) und b) keinen Widerspruch zu Satz 20.12 aus dem Skript?

Aufgabe 13.2. [Potentiale] Es seien die Vektorfelder $\phi, \psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \psi(x,y,z) = \begin{pmatrix} \exp(-x^2) + y^2 + z^2 \\ 2xy \\ 2xz \end{pmatrix}$$

und die Kurve Γ, parametrisiert durch

$$\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \; \gamma(t) = \big(\cos^2(t), \sin^2(t), \sin(t)\big) \; .$$

a) Untersuchen Sie, ob ϕ und ψ ein Potential besitzen.

b) Welchen Wert hat das vektorielle Kurvenintegral $\int\limits_{\Gamma} \psi(x,y,z) \cdot \mathrm{d}(x,y,z)$?

c) Berechnen Sie das vektorielle Kurvenintegral $\int\limits_{\Gamma} \phi(x,y,z) \cdot \mathrm{d}(x,y,z)$.

Aufgabe 13.3. [Reguläre Kurven] Gegeben sei die Kurve Γ, parametrisiert durch

$$\gamma\colon [0, 10\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(t) = (\exp(t)\cos(t), \exp(t)\sin(t), \exp(t))\ .$$

Zeigen Sie, dass γ regulär ist und parametrisieren Sie die Kurve nach der Bogenlänge. Geben sie dabei die Bogenlänge konkret an.
Hinweis: Bestimmen Sie also eine Parametrisierung $\tilde{\gamma}\colon [0, l_\Gamma] \to \mathbb{R}^3$ von Γ mit $|\dot{\tilde{\gamma}}(t)| = 1$ für alle $t \in [0, l_\Gamma]$. Dabei beschreibt l_Γ die Bogenlänge von Γ.

Aufgabe 13.4. [Wegunabhängigkeit] Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $g\colon M \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$\int_\Gamma g \,\mathrm{d}x \text{ ist wegunabhängig } \Leftrightarrow \int_\Gamma g \,\mathrm{d}x = 0 \text{ für alle geschlossenen Wege } \Gamma.$$

Abgabe am 05.07.2023 bis 14:00 Uhr online.