

Übungen zur Vorlesung
Höhere Mathematik II (P, ETIT, AI, DS)
Sommersemester 2023

Prof. Dr. B. Schweizer

Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen.

Die Aufgaben 12.1, 12.2 und 12.3 sind schriftlich zu bearbeiten.

Aufgabe 12.1. [Integration über schlichte Gebiete] Es seien

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < 4, \sqrt{y} < x < \sqrt{20 - y^2} \right\}$$

und $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{-5\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x}{y+5}$ gegeben. Berechnen Sie

$$\int_M f \, d(x, y).$$

Fertigen Sie eine Skizze von M an.

Aufgabe 12.2. [Windung der kanonischen Schraubenlinie und Astroide]

a) Wir betrachten die Kurve Γ , parametrisiert durch

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) := (t \cos(t), t \sin(t), t).$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma} \left(2z - \sqrt{x^2 + y^2} \right) \, ds.$$

b) Wir betrachten die Kurve Γ , parametrisiert durch

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) := (\cos^3(t), \sin^3(t)).$$

Berechnen Sie die Länge von Γ .

Aufgabe 12.3. [Schwerpunkt eines Sektors] Es sei ein Kreis mit Radius $R > 0$ gegeben. Berechnen Sie den Schwerpunkt eines Sektors mit dem Mittelpunktswinkel $2\alpha < \pi$

- durch Einführung von Polarkoordinaten,
- durch direkte Berechnung.

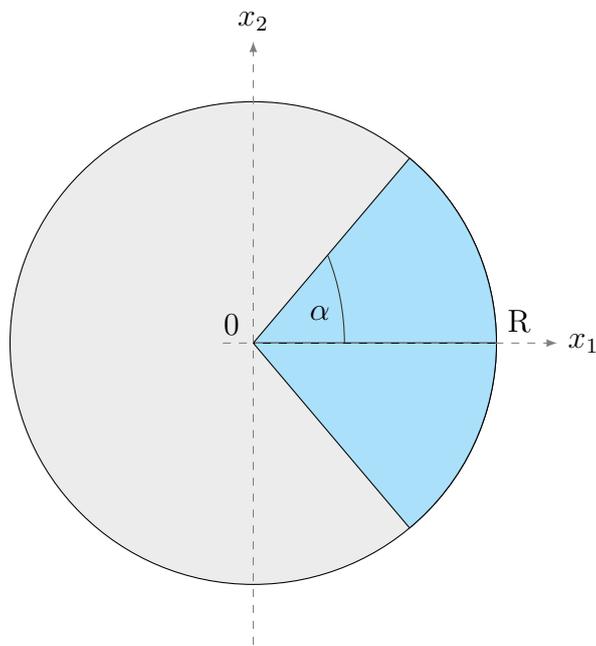


Abbildung 1: Der Kreis ist in grau, der Sektor in blau angegeben.

Aufgabe 12.4. [Volumen von Rotationskörpern] Es sei $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cosh(x)$ und

$$F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1], 0 \leq y \leq f(x)\}$$

die Fläche unter dem Graphen von f und

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [-1, 1], y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$$

der Körper, der durch Rotation von F um die x -Achse entsteht.

- Berechnen Sie den Flächeninhalt und Schwerpunkt von F mit Massendichte $\rho \equiv 1$.
- Berechnen Sie das Volumen und den Schwerpunkt von K mit Massendichte $\rho \equiv 1$.