

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik II (P, ETIT, AI, DS)

Sommersemester 2023

Prof. Dr. B. Schweizer

Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen.

Die Aufgaben 11.1, 11.2 und 11.3 sind schriftlich zu bearbeiten.

Aufgabe 11.1. [Extrema unter Nebenbedingungen und Lagrange Multiplikatoren] Bestimmen Sie die Extrema der Funktion f mit $f(x, y) = x^2 - y^2$ unter der Nebenbedingung $2x^2 + y^2 = 4$, indem Sie

- Lagrange-Multiplikatoren verwenden,
- die Nebenbedingung nach einer Variable auflösen und in die Funktion f einsetzen,
- die Parametrisierung $x(t) = \sqrt{2} \cos(t)$, $y(t) = 2 \sin(t)$ mit $t \in [0, 2\pi)$ verwenden und anschließend die Funktion $h(t) := f(x(t), y(t))$ untersuchen.

Aufgabe 11.2. [Extrema unter Nebenbedingungen] Bestimmen Sie die Extrema der Funktion f mit $f(x, y, z) = x + y^2 z^2$ unter den Nebenbedingungen $g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0$ mit $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ und $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

- Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren.
- Führen Sie die Aufgabe auf eine eindimensionale Extremwertaufgabe zurück.

Aufgabe 11.3. [Integration über Gebiete] Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ das Dreieck mit den Ecken $(0, 0)$, $(1, 1)$ und $(-1, 1)$.

- Berechnen Sie das Integral $\int_G x^2 y \, d(x, y)$, indem Sie zuerst nach y integrieren.
- Berechnen Sie das Integral $\int_G x^2 y \, d(x, y)$, indem Sie zuerst nach x integrieren.
- Berechnen Sie $\int_G \exp(y^2) \, d(x, y)$.

Aufgabe 11.4. [Ladungsverteilung und Gesamtladung] Im Volumen $V_h \subset \mathbb{R}^3$ definiert durch $|x| < 1$, $|y| \leq 1$ und $0 \leq z \leq h$ ist eine Ladungsverteilung mit der Dichte

$$\rho(x, y, z) := (x^2 + y^2) \exp(-z)$$

gegeben.

- a) Berechnen Sie die Gesamtladung $Q(h) := \int_{V_h} \rho(x, y, z) d(x, y, z)$.
- b) Untersuchen Sie das Verhalten von Q für $h \rightarrow \infty$.

Abgabe am 21.06.2023 bis 14:00 Uhr online.