Blatt 10 07.06.2023

Übungen zur Vorlesung

# Höhere Mathematik II (P, ETIT, AI, DS)

Sommersemester 2023

Prof. Dr. B. Schweizer Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen.

**Die Aufgaben 10.1, 10.2 und 10.3 sind schriftlich zu bearbeiten.**

**Aufgabe 10.1.** [Lokale und globale Umkehrbarkeit] Es sei die Funktion $f$ definiert durch

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R},\ f(x,y) := \begin{pmatrix} \exp(x-y) \\ x+y \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie die Ableitung und die Jacobi-Determinante von $f$. Bestimmen Sie die Menge aller Punkte, in denen $f$ lokal umkehrbar ist.

b) Zeigen Sie, dass $f$ global umkehrbar ist, und geben sie die explizite Gestalt von $f^{-1}$ an.

c) Berechnen Sie die Ableitung von $f^{-1}$ und die Jacobi-Determinante von $f^{-1}$ unter Verwendung

 (i) des Satzes über die lokale Umkehrbarkeit von Abbildungen aus der Vorlesung,

 (ii) der angegebenen Gestalt von $f^{-1}$.

**Aufgabe 10.2.** [Polarkoordinaten]

a) Wir betrachten ebene Polarkoordinaten

$$\phi\colon (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} .$$

 (i) Zeigen Sie, dass $\phi$ lokal umkehrbar ist.

 (ii) Geben Sie eine Einschränkung von $\phi$ an, die bijektiv auf ihr Bild ist. Bestimmen Sie die Umkehrabbildung und die Jacobi-Matrix dieser Einschränkung.

b) Wir betrachten räumliche Polarkoordinaten

$$\psi\colon (0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \psi(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} x(r,\varphi,\theta) \\ y(r,\varphi,\theta) \\ z(r,\varphi,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix} .$$

(i) Zeigen Sie, dass $\psi$ für $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ lokal umkehrbar ist.

(ii) Geben Sie eine Einschränkung von $\psi$ an, die bijektiv auf ihr Bild ist. Bestimmen Sie die Umkehrabbildung und die Jacobi-Matrix dieser Einschränkung.

**Aufgabe 10.3.** [Implizite Funktionen] Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y, z) := z^3 + 2xy - 4xz + 2y - 1\,.$$

Zeigen Sie, dass durch die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ eine differenzierbare Funktion $z = \varphi(x, y)$ in einer Umgebung $U$ von $(x, y) = (1, 1)$ mit $\varphi(1, 1) = 1$ implizit definiert ist. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_x\varphi(1, 1)$ und $\partial_y\varphi(1, 1)$.

**Aufgabe 10.4.** [Lemniskate von Bernoulli] Wir betrachten die Lemniskate von Bernoulli, die durch die folgende Gleichung gegeben ist:

$$F(x, y) := (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0\,.$$

a) Untersuchen Sie, für welche Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Gleichung nach $y$ auflösbar ist, und bestimmen Sie die Auflösungsfunktionen.

b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Auflösungsfunktionen.

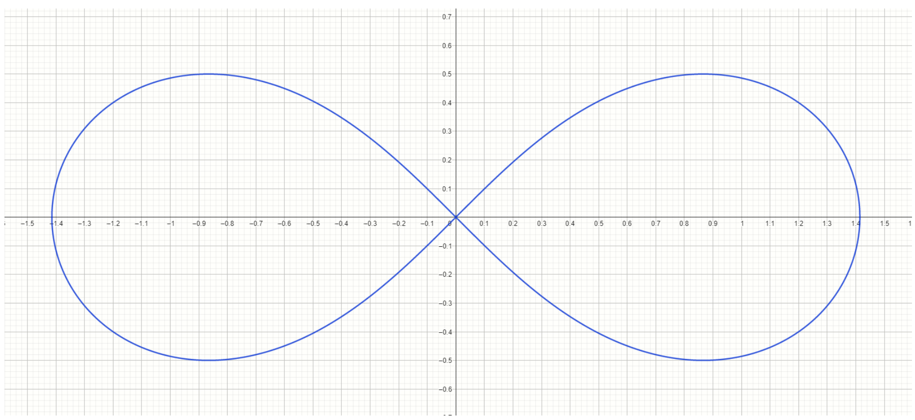

Abbildung 1: Lemniskate von Bernoulli

---

Abgabe am 14.06.2023 bis 14:00 Uhr online.