Blatt 1 05.04.2023

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik II (P, ETIT, AI, DS)

Sommersemester 2023

Prof. Dr. B. Schweizer Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen.

Die Aufgaben 1.1, 1.2 und 1.3 sind schriftlich zu bearbeiten.

Aufgabe 1.1. [Rechenregeln der Differentiation] Differenzieren Sie die folgenden Funktionen:

a) $f_1(x) := \exp(x)\sin(x)$

b) $f_2(x) := \sin(x)^2 + \cos(x)^2$

c) $f_3(x) := \cos\left(x^2\right)$

d) $f_4(x) := \ln(\cos(x))$

e) $f_5(x) := \dfrac{\cos(x)}{1+x^2}$

Aufgabe 1.2. [Ableitung der Umkehrfunktion]

a) Wir betrachten die Exponentialfunktion

$$\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty),\ x \mapsto \exp(x)$$

mit $\exp'(x) = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Ableitung des Logarithmus

$$\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ y \mapsto \ln(y)$$

mit Hilfe der Ableitung der Umkehrfunktion 13.7 aus der Vorlesung.

b) Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die Funktionen

$$f_n\colon (0,\infty) \to (0,\infty),\ x \mapsto x^n$$

mit $f_n'(x) = nx^{n-1}$ für alle $x \in (0,\infty)$. Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ die Ableitungen der Funktionen

$$g_n\colon (0,\infty) \to (0,\infty),\ y \mapsto \sqrt[n]{y}$$

mit Hilfe der Ableitung der Umkehrfunktion 13.7 aus der Vorlesung.

Aufgabe 1.3. [Mittelwertsatz] Zeigen Sie, dass für $x > 0$ folgende Ungleichung gilt:

$$\ln(1+x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f(t) := \ln(1+t) - \frac{t}{\sqrt{1+t}}$ im Intervall $[0, x]$ und nutzen Sie den Mittelwertsatz 13.14 aus der Vorlesung.

Aufgabe 1.4. [Die Lambertsche W-Funktion] Gegeben sei für $x \in \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) := x \exp(x)$.

a) Geben Sie ein maximales Intervall $I \subset \mathbb{R}$ an, mit $0 \in I$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ injektiv.

b) Bestimmen Sie die Bildmenge $B := f(I)$.

c) Wir definieren die Umkehrfunktion $W\colon B \to I,\ W(x) := f^{-1}(x)$ als die *Lambertsche W-Funktion*. Skizzieren Sie die Funktion W.

d) Untersuchen Sie die Funktion W auf Monotonie und Differenzierbarkeit.

e) Zeigen Sie, dass für alle $x \in B \setminus \{0\}$ gilt:

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}\,.$$

Abgabe am 12.04.2023 bis 14:00 Uhr in die Briefkästen oder online.