Name:
Matrikelnummer:

TU Dortmund 20.09.2023

Höhere Mathematik II (P/ET/AI/MP/DS)

Klausur 2

Sommersemester 2023

Prof. Dr. B. Schweizer Tim Schubert

Informationen zur Klausur

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten
- Die Klausur umfasst 8 Aufgaben, es können bis zu 100 Punkte erreicht werden
- Die Klausur ist in jedem Fall bestanden, wenn 50 Punkte erreicht werden
- Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen
- Benutzen Sie keinen Rotstift und keinen Bleistift
- Tragen Sie auf jede Seite Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein
- Schreiben Sie Ihre Antworten unter die Aufgabe und, falls notwendig, auf die Rückseite der Aufgabenseite. Falls der Platz nicht reicht, so verwenden Sie die Zusatzblätter am Ende des Klausurenblocks; in diesem Fall: Vorne ein klarer Hinweis darauf.

Täuschungsversuche

Spickzettel, Reden mit dem Nachbarn, Hinübersehen zum Nachbarn wird als Täuschungsversuch gewertet. Wir sind streng mit elektronischen Geräten wie Smartphones, Taschenrechner, Smartwatches und Ähnlichem: Wenn wir ein solches Gerät an Ihrem Platz sehen, so wird dies ebenfalls als Täuschungsversuch gewertet.

Bei einem Täuschungsversuch wird die Klausur als nicht bestanden gewertet.

Die nachfolgende Tabelle ist für die Korrektur durch uns, bitte tragen Sie hier nichts ein!

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
von 11	von 16	von 13	von 11	von 16	von 10	von 11	von 12

Σ
von 100

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1. [11 Punkte]
Geben Sie in groben Zügen den Satz über implizite Funktionen an. Sie müssen dabei keine Details angeben, zum Beispiel müssen Sie keine Umgebungen spezifizieren. Der Kern der Aussage muss aber klar werden, indem Sie die Funktionen und Dimensionen konkret angeben.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2. [16 Punkte]
Wir betrachten die Einheitskugel $D := B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ und die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^4$.

(a) Berechnen Sie mit Kugelkoordinaten das Integral $\int_D f$.

(b) Skizzieren Sie für die in (a) gemachte Rechnung, was die verwendete Transformationsabbildung ist, welcher abtrakte Transformationssatz verwendet wurde und skizzieren Sie, wie man aus der allgemeinen Formel den Volumenfaktor im konkreten Beispiel berechnet.

(c) Geben Sie zwei Probleme an, die dafür sorgen, dass der Transformationssatz der Vorlesung streng genommen oben gar nicht anwendbar war.
Hinweis: Es gibt drei Probleme.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 3. [13 Punkte]
Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt.

(a) Geben Sie die Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt x_0 mindestens bis zum Term dritter Ordnung an (sodass ein Term mit dritter Potenz auftaucht). Um die Aufgabe zu erleichtern: Sie dürfen eine beliebige Form angeben, zum Beispiel mit Multiindizes, so dass $(x - x_0)^\alpha$ auftaucht, oder die Form, die entsteht, wenn Sie die eindimensionale Funktion $F(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$ entwickeln.

(b) Wann nennen wir eine Matrix A positiv definit? Was können Sie folgern, wenn $Df(x_0) = 0$ gilt und die Hesse-Matrix von f in x_0 positiv definit ist? Skizzieren Sie eine Begründung, warum dies gilt.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 4. [11 Punkte]
Gegeben seien die Funktionen $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F(x) := \sin\big(x^2 + \sin(x)\cos^2(x)\big) \qquad \text{und} \qquad g(x) := \big(x^2, \sin(x), \cos^2(x)\big)\ .$$

Berechnen Sie $F'(x)$ unter Benutzung der mehrdimensionalen Kettenregel. Geben Sie dafür eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ an, sodass $F = f \circ g$ gilt.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 5. [16 Punkte]
Wir betrachten, für $T := 2 + (\pi/2)$, den Weg $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) := \begin{cases} t \cdot (1,0) & \text{für } t \in [0,1] \\ (\cos(t-1), \sin(t-1)) & \text{für } t \in [1, T-1] \\ (T-t) \cdot (0,1) & \text{für } t \in [T-1, T]\,. \end{cases}$$

Tipp: Machen Sie sich klar, wie dieser Weg aussieht.
Wir betrachten die skalare Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $g(x_1, x_2) := 1 - |(x_1, x_2)|^2$ und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $f(x_1, x_2) := (x_1, x_2)$.

(a) Geben Sie die definierende Formel für (skalare) Wegintegrale an und berechnen Sie $\int_\gamma g$ mit dieser Formel.

(b) Geben Sie die definierende Formel für (vektorielle) Wegintegrale an und berechnen Sie $\int_\gamma f(x) \cdot dx$ mit dieser Formel.

(c) Geben Sie ein abstraktes Argument an, warum das Ergebnis in (b) genau so sein musste.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 6. [10 Punkte]
Berechnen Sie für $a > 0$ das Integral

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 - ax^4}} \, \mathrm{d}x$$

mit Substitution.

Hinweis: Es gilt $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 7. [11 Punkte]
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$. Wir betrachten das Dreieck

$$D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq y \leq a,\ 0 \leq x \leq by \right\} .$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_D \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}(x, y) .$$

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 8. [12 Punkte]
Bestimmen Sie die Lösung von $y' = t^2 y^2 + t^2$ mit $y(0) = 1$.

Hinweis: Es gilt $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Name:
Matrikelnummer:

Name:
Matrikelnummer: