Name:
Matrikelnummer:

TU Dortmund 25.07.2023

Höhere Mathematik II (P/ET/AI/MP/DS)

Klausur 1

Sommersemester 2023

Prof. Dr. B. Schweizer Tim Schubert

Informationen zur Klausur

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten
- Die Klausur umfasst 8 Aufgaben, es können bis zu 100 Punkte erreicht werden
- Die Klausur ist in jedem Fall bestanden, wenn 50 Punkte erreicht werden
- Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen
- Benutzen Sie keinen Rotstift und keinen Bleistift
- Tragen Sie auf jede Seite Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein
- Schreiben Sie Ihre Antworten unter die Aufgabe und, falls notwendig, auf die Rückseite der Aufgabenseite. Falls der Platz nicht reicht, so verwenden Sie die Zusatzblätter am Ende des Klausurenblocks; in diesem Fall: Vorne ein klarer Hinweis darauf.

Täuschungsversuche

Spickzettel, Reden mit dem Nachbarn, Hinübersehen zum Nachbarn wird als Täuschungsversuch gewertet. Wir sind streng mit elektronischen Geräten wie Smartphones, Taschenrechner, Smartwatches und Ähnlichem: Wenn wir ein solches Gerät an Ihrem Platz sehen, so wird dies ebenfalls als Täuschungsversuch gewertet.

Bei einem Täuschungsversuch wird die Klausur als nicht bestanden gewertet.

Die nachfolgende Tabelle ist für die Korrektur durch uns, bitte tragen Sie hier nichts ein!

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	$\boldsymbol{\Sigma}$
von 11	von 11	von 12	von 14	von 13	von 15	von 12	von 12	von 100

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1. [11 Punkte]
Geben Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung an. Sie dürfen eine beliebige Version des Satzes angeben, müssen aber die vorkommenden Begriffe erklären.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2. [11 Punkte]
Berechnen Sie mittels partieller Integration das Integral

$$\int_0^1 x \cdot \arctan(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Tipp: Verwenden Sie $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 3. [12 Punkte]
Wir betrachten das Dreieck $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_D 2 \exp\left(x^2\right) \, \mathrm{d}(x, y)\,.$$

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 4. [14 Punkte]
Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3 \sin(x)}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

(a) Ist die Funktion f stetig auf $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie Ihre Aussage.

(b) Berechnen Sie die Ableitung $Df(x,y)$ in einem beliebigen Punkt $(x,y) \neq (0,0)$.

(c) Kann die Abbildung $(x,y) \mapsto Df(x,y)$ stetig in den Punkt $(0,0)$ fortgesetzt werden? Begründen Sie Ihre Aussage.

(d) Ist die Funktion f auf $\mathbb{R}^2$ total differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort mit *zwei verschiedenen* Argumenten.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 5. [13 Punkte]
Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)\,.$$

(a) Berechnen Sie die Ableitungsmatrix $Df(x_1, x_2)$ in beliebigen Punkten und speziell im Punkt $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

(b) Ist der Satz über die Existenz einer lokalen Umkehrfunktionen im Punkt $(0, 0)$ anwendbar?

(c) Gibt es eine lokale Umkehrfunktionen von f im Punkt $(0, 0)$?

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 6. [15 Punkte]
Wir betrachten, für $T := 2 + (\pi/2)$, den Weg $\gamma\colon [0, T] \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(t) := \begin{cases} t \cdot (1, 1, 0) & \text{für } t \in [0, 1] \\ (\cos(t-1), \cos(t-1), \sin(t-1)) & \text{für } t \in [1, T-1] \\ (T-t) \cdot (0, 0, 1) & \text{für } t \in [T-1, T]\,. \end{cases}$$

Tipp: Machen Sie sich klar, wie dieser Weg aussieht.
Wir betrachten das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch $f(x_1, x_2, x_3) := (x_1, x_2, x_3)$.

(a) Berechnen Sie das (vektorielle) Wegintegral $\int_\gamma f(x) \cdot dx$.

(b) Geben Sie ein abstraktes Argument an, warum das Ergebnis in (a) genau so sein musste.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 7. [12 Punkte]
Bestimmen Sie die absoluten Extrema von $f(x, y, z) = xz - y^2$ unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 2$.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 8. [12 Punkte]
Wir betrachten eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, $y' = Ay$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(a) Es sei v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Geben Sie eine Lösung der Differentialgleichung an und weisen Sie nach, dass damit eine Lösung gefunden ist.

(b) Für $T > 0$ betrachten wir die Menge $\{y \colon [0,T] \to \mathbb{R}^n \mid y' = Ay\}$. Geben Sie zwei relevante Eigenschaften dieser Menge an und weisen Sie eine davon nach.

(c) Es sei $\Phi \colon [0,T] \to \mathbb{R}^{n \times n}$ ein Fundamentalsystem der Gleichung mit $\Phi(0) = \mathrm{Id}$. Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay$ mit $y(0) = y_0$ an. Weisen Sie nach, dass damit eine Lösung gefunden ist.

Name:
Matrikelnummer:

Name:
Matrikelnummer: