TU Dortmund 27.01.2023

Höhere Mathematik I (P/ET/AI/MP/DS)

Probeklausur

Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. B. Schweizer Tim Schubert

Aufgabe 1. [5 Punkte]

Definieren Sie die Begriffe

a) reeller Vektorraum,

b) Rang(A), Bild(A) und Kern(A) einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Aufgabe 2. [5 Punkte]

a) Formulieren Sie das Monotoniekriterium für reelle Zahlenfolgen.

b) Formulieren Sie den Zwischenwertsatz.

Aufgabe 3. [15 Punkte]

a) Es sei für $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det(A) = 0$ die Matrix $A_\varepsilon \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert durch

$$A_\varepsilon := A + \varepsilon I_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\varepsilon & b \\ c & d+\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle ε in Abhängigkeit von $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix A_ε invertierbar ist.

b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix mit Eigenwert λ und zugehörigem Eigenvektor x. Zeigen Sie, dass dann $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert der Matrix A^{-1} zum Eigenvektor x ist.

Aufgabe 4. [15 Punkte]

a) Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $0 \neq a \in \mathbb{R}$. Es gelte $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$. Zeigen Sie, dass die Folge $\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

b) Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ und

$$\sqrt{a_k^2 - a^2} \longrightarrow 0.$$

Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$ gilt.

Aufgabe 5. [8 Punkte] Es sei $I_2 \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ die Einheitsmatrix. Geben Sie Matrizen $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ an, sodass gilt:

a) A ist nicht invertierbar.

b) $\dim \operatorname{Kern}(A) = 1$.

c) $\dim \operatorname{Bild}(A) = 1$.

d) $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$.

e) A ist nicht diagonalisierbar.

f) $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und alle Eigenwerte sind Elemente in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

g) $I_2 \neq A$ ist hermitesch.

h) $I_2 \neq A$ ist orthogonal.

Aufgabe 6. [4 Punkte] Geben Sie reelle Zahlenfolgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ an, sodass gilt:

a) Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt eine Teilfolge, die eine Nullfolge ist, aber $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht.

b) Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, aber die Folge $(a_k b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht.

c) $|a_k b_k| + |b_k^2 - 1| \longrightarrow 0$ aber $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sind nicht beide konvergent.

d) $\sqrt{a_k^2 - a^2} \longrightarrow 0$ für ein $a \in \mathbb{R}$, aber $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \neq a$.

Aufgabe 7. [12 Punkte] Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

a) $|z + \mathrm{i}| = |z - 1|$.

b) $z^2 + \overline{z} = \mathrm{i} - \mathrm{Im}(z)^2$.

Aufgabe 8. [12 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Matrix A die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$ und $\lambda_3 = 2 - \sqrt{2}$ besitzt.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A.

Aufgabe 9. [12 Punkte] Es seien

$$U := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$
$$V := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

zwei Ebenen im Raum $\mathbb{R}^3$.

a) Geben Sie eine mögliche Parameterdarstellung der Ebenen U und V an.

b) Bestimmen Sie den Schnitt der Ebenen U und V.

Aufgabe 10. [12 Punkte] Untersuchen Sie die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_k = \frac{2k^2 + (-1)^k(k^2 + 2)}{k^2}$$

auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.