technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
Dr. M. Kniely

Wintersemester 2020/21
28.01.2021

Festkörpermechanik

Blatt 9

Abgabe bis Donnerstag, den 04.02.2021, um 12:00

Aufgabe 1 (Abschätzungen für zeitdiskrete Approximationen).
Sei $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Sei Ψ eine Stammfunktion von b^{-1}, es gelte also $\Psi' = \varphi := b^{-1}$. Zeigen Sie, dass für alle $u, v \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$b(u)v - b(v)v \le \Psi(b(u)) - \Psi(b(v)) \tag{1}$$

gilt.

i) Beweisen Sie (1) mit Methoden der konvexen Analysis.

ii) Verwenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechung, um (1) zu beweisen, falls b auch differenzierbar ist.

Aufgabe 2 (Strikt konvexe Funktionale und Abschätzungen).
Sei X ein Banachraum und $R\colon X \to \mathbb{R}$ ein konvexes Funktional. Weiterhin sei $q\colon X \times X \to \mathbb{R}$ eine koerzive, symmetrische Bilinearform mit Koerzivitätskonstante $\alpha > 0$. Wir definieren $Q, I\colon X \to \mathbb{R}$ durch $Q(u) := q(u,u)$ und $I(u) := Q(u) + R(u)$.

i) Zeigen Sie, dass I eine streng 1/2-konvexe Funktion ist, d.h es gilt die Abschätzung

$$I\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\right) \le \frac{1}{2}I(u) + \frac{1}{2}I(v) - \frac{\alpha}{4}\|u - v\|^2 \quad \text{für alle } u, v \in X\,.$$

ii) Sei $u_0 \in X$ ein Minimum von I, d.h. $I(u_0) \le I(v)$ für alle $v \in X$. Folgern Sie aus i)

$$\frac{\alpha}{2}\|u - u_0\|^2 \le I(u) - I(u_0) \quad \text{für alle } u \in X\,.$$

Aufgabe 3 (Plastizität mit zeitabhängiger Randbedingung).
Stellen Sie eine Energiegleichung analog zu Gleichung (27.28) im Buch für den Fall auf, dass die Randwerte $U_0(x,t)$ auch von dem Zeitparameter t abhängen. Leiten Sie unter geeigneten Regularitätsannahmen an U_0 eine zugehörige A-priori-Abschätzung her.