technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
Dr. M. Kniely

Wintersemester 2020/21
21.01.2021

Festkörpermechanik

Blatt 8

Abgabe bis Donnerstag, den 28.01.2021, um 12:00

Aufgabe 1 (Volumenerhaltende Abbildungen und Spurfreiheit).
Für plastische Verformungen betrachtet man Deformationen $\Phi(x) = \mathrm{id} + \varepsilon u(x)$, die volumenerhaltend sind.

a) Argumentieren Sie, dass man in der linearen Theorie mit Abbildungen u arbeiten sollte, die $\operatorname{spur} \nabla u(x) = 0$ erfüllen, also mit u, sodass der symmetrische Gradient eine deviatorische Matrix ist, $\nabla^S u(x) \in X_D$.

b) Zeigen Sie, dass für K wie in der von-Mises-Plastizität $\operatorname{spur} p(t) = 0$ erfüllt ist, sofern $\operatorname{spur} p(0) = 0$ gilt.

Aufgabe 2 (Relationen der von-Mises-Plastizität).
Weisen Sie die expliziten Relationen für $\partial\Psi(\sigma)$, $\Psi^*(\varepsilon)$ und $\partial\Psi^*(\varepsilon)$ nach (siehe (27.13) – (27.15) im Buch).

Aufgabe 3 (Wertebereich der schwachen Grenzfunktion).
Für ein Grundgebiet $\Sigma \subset \mathbb{R}^N$, eine Zielmenge $\mathbb{R}^M$ und eine Folge $\delta \to 0$ sei $u_\delta \colon \Sigma \to \mathbb{R}^M$ eine schwach konvergente Folge von Funktionen, $u_\delta \rightharpoonup u$ in $L^2(\Sigma)$. Für eine Folge von Potentialfunktionen $0 \le \Psi_\delta \colon \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ und eine konvexe und abgeschlossene Menge $0 \in K \subset \mathbb{R}^M$ gelte $\Psi_\delta(v) \ge \delta^{-1}$ für alle $v \notin K$. Zeigen Sie, dass eine δ-unabhängige Abschätzung

$$\int_\Sigma \Psi_\delta(u_\delta) \le C_0$$

impliziert, dass $u(x) \in K$ für fast alle $x \in \Sigma$ gilt.

Anleitung: Betrachten Sie die Menge gutartiger Punkte $G_\delta := \{x \in \Sigma \mid u_\delta(x) \in K\}$ und die charakteristischen Funktionen $\chi_\delta := \mathbb{1}_{G_\delta}$ und weisen Sie

$$\int_\Sigma |\chi_\delta(x) - 1|^2 \, dx \to 0$$

nach. Schließen Sie aus dieser starken Konvergenz $\chi_\delta \to \mathbb{1}_\Sigma$ für das Produkt die schwache Konvergenz $u_\delta \chi_\delta \rightharpoonup u$ in $L^1(\Sigma)$. Folgern Sie aus $u_\delta(x)\chi_\delta(x) \in K$ für alle $x \in \Sigma$, dass $u(x) \in K$ für fast alle $x \in \Sigma$ gilt.