technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
Dr. M. Kniely

Wintersemester 2020/21
03.12.2020

Festkörpermechanik

Blatt 5

Abgabe bis Donnerstag, den 10.12.2020, um 12:00

Aufgabe 1 (Instabilität eines Stabes unter Belastung).
Linearisieren Sie die Gleichung

$$\partial_x(A\,\partial_x\theta(x)) + F\sin(\theta(x)) = 0$$

für Eulers Elastica mit $x \in (0, L)$ und Randwerten $\partial_x\theta(0) = \partial_x\theta(L) = 0$ um die triviale Lösung $\theta \equiv 0$. Berechnen Sie einen kritischen Wert für die Kraft $F_* = F_*(A, L)$, sodass Folgendes gilt:

1. Für Kräfte $0 < F < F_*$ hat die linearisierte Gleichung nur eine Lösung, nämlich die triviale Lösung.

2. Für die Kraft $F = F_*$ hat die linearisierte Gleichung unendlich viele Lösungen.

Zur Information: Bei Ausübung einer Kraft $F > F_*$ ist die Ruhelösung $\theta \equiv 0$ für den Stab nicht mehr stabil, ein realer Stab nimmt anstelle der geraden Form (unter Kompression) lieber eine gekrümmte Form ein. Auch die Lösung der nichtlinearen Gleichung ist für $F \geq F_*$ nicht mehr eindeutig, allerdings sorgt die Nichtlinearität dafür, dass für jedes F nur endlich viele Lösungen existieren.

Aufgabe 2 (Scherung in der Cauchy-Theorie).
Wir betrachten die Cauchy-Theorie im dreidimensionalen Raum, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Für $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ist eine *Scherung* gegeben durch

$$\Phi(x) = x + \varepsilon x_2 e_1 \quad \text{mit} \quad \nabla\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den linken Cauchy-Green-Spannungstensor und seine Eigenwerte. Geben Sie das entsprechend konkretisierte Materialgesetz

$$\mathcal{F}(A) = \alpha_0(A^TA)\mathrm{id} + \alpha_1(A^TA)AA^T + \alpha_2(A^TA)(AA^T)^2$$

an.

Aufgabe 3.

Mithilfe der Impulserhaltung lässt sich im instationären Fall für die orts- und zeitabhängigen Größen Φ, S und $\bar{f}$ in der Piola-Kirchhoff-Theorie die Gleichung

$$\rho\,\partial_t^2\Phi - \nabla\cdot S = \bar{f} \quad \text{ in } \Omega \tag{1}$$

herleiten. Zeigen Sie, dass die Summe aus kinetischer und elastischer Energie,

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega \rho(x)|\partial_t\Phi(x,t)|^2\,dx + \int_\Omega W(\nabla\Phi(x,t))\,dx,$$

die Energieerhaltung

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = \int_\Omega \bar{f}(x)\cdot\partial_t\Phi(x,t)\,dx$$

erfüllt, sofern (1) gilt und auf jedem Teil von $\partial\Omega$ die Kraft in Normalenrichtung $\nabla W(\nabla\Phi)\cdot\nu$ oder die Änderung der Auslenkung $\partial_t\Phi$ verschwinden.