

Festkörpermechanik

Blatt 4

Abgabe bis Donnerstag, den 03.12.2020, um 12:00

Aufgabe 1 (Schwingungsgleichung für Saiten).

In der Vorlesung wurde ein Modell für die statische Beschreibung einer Saite hergeleitet. Dieselbe Herleitung liefert auch in zeitabhängigen Problemen eine Evolutionsgleichung für die Positionsvariable $\Phi: [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x, t) \mapsto \Phi(x, t)$. Hierbei seien $T, L > 0$. Bezeichnen wir die Massendichte der Saite im Punkt x mit $\rho(x)$, so ergibt sich die Schwingungsgleichung

$$\rho(x)\partial_t^2\Phi(x, t) = \partial_x \left(\tilde{\sigma} \left(\|\partial_x\Phi(x, t)\| \right) \frac{\partial_x\Phi(x, t)}{\|\partial_x\Phi(x, t)\|} \right) + f(x, t) \quad (1)$$

für alle $(x, t) \in (0, L) \times (0, T)$.

Auch die Saite eines Instruments ist eine Saite in unserem Sinne. Zeigen Sie, dass bei konstanter Dichte ρ_0 und ohne äußere Kraft f die Linearisierung der Gleichung (1) die Wellengleichung $\rho_0\partial_t^2u = \sigma_0\partial_x^2u$ ergibt. Geben Sie die Frequenzen einer schwingenden Saite der Länge L in Abhängigkeit von σ_0 , ρ_0 und L an.

Aufgabe 2 (Kettengleichung).

- i) Wir betrachten $n = 2$ und eine Gewichtskraft $f(x) = -\rho e_2$ mit $\rho \in \mathbb{R}$. Für die Lösung $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ der Gleichung

$$-\partial_x(s(x)\partial_x\Phi(x)) = f(x), \quad \|\partial_x\Phi(x)\| = 1, \quad (2)$$

nehmen wir an, dass sie als Graph geschrieben werden kann, dass also eine Abbildung $Y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, sodass $\Phi_2(x) = Y(\Phi_1(x))$ für alle $x \in I$ gilt. Leiten Sie für Y die Kettengleichung

$$\partial_\xi^2 Y(\xi) = k\rho\sqrt{1 + |\partial_\xi Y(\xi)|^2} \quad (3)$$

her, wobei $k \in \mathbb{R}$ eine Integrationskonstante ist, die aus den Randwerten bestimmt werden muss.

Anleitung: Eliminieren Sie $\partial_x\Phi_2$ mit Hilfe der Gleichung $\Phi_2(x) = Y(\Phi_1(x))$, dann $\partial_x\Phi_1$ unter Verwendung von $\|\partial_x\Phi(x)\| = 1$. Mit der ersten Komponente der ersten Gleichung in (2) eliminieren Sie s bis auf eine Integrationskonstante \tilde{k} . Die zweite Komponente dieser Gleichung liefert (3).

- ii) Überzeugen Sie sich, dass cosh explizite Lösungen der Kettengleichung (3) liefert. Lösen Sie das Randwertproblem $Y(a) = y_l$ und $Y(b) = y_r$ für vorgegebene Daten $a, b, y_l, y_r \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Aufgabe 3 (Kreuzprodukt nach einer Transformation).

Zeigen Sie für eine invertierbare Matrix $F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ die Regel

$$(Fa) \times (Fb) = \det(F) (F^{-1})^T (a \times b).$$