technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
Dr. M. Kniely

Wintersemester 2020/21
19.11.2020

Festkörpermechanik

Blatt 3

Abgabe bis Donnerstag, den 26.11.2020, um 12:00

Aufgabe 1 (Energieminimierung).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Der Elastizitätstensor $\mathbb{A} : \mathbb{R}^{n\times n}_s \to \mathbb{R}^{n\times n}_s$ sei symmetrisch und positiv. Zeigen Sie, dass sich die Lösung $u \in H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^n)$ der Elastizitätsgleichungen

$$-\nabla \cdot \sigma(x) = f(x), \qquad \sigma(x) = \mathbb{A}\nabla^s u(x) \quad \text{in } \Omega$$

charakterisieren lässt als der Minimierer der Energie

$$\mathcal{E}(u) \coloneqq \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla^s u : \mathbb{A}\nabla^s u - \int_\Omega f \cdot u.$$

Aufgabe 2 (Druck- und Scherwellen in einem elastischen Medium).
Es sei $T > 0$. Wir betrachten die Wellengleichung

$$\rho\partial_t^2 u(x,t) - \nabla \cdot \sigma(x,t) = 0, \qquad \sigma(x,t) = \mathbb{A}\nabla^s u(x,t) \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times [0,T).$$

Die Dichte $\rho > 0$ sei konstant und der Elastizitätstensor $\mathbb{A}$ sei wieder durch die Vorschrift $e \mapsto 2\mu e + \lambda\,\mathrm{spur}(e)\,\mathrm{id}$ gegeben. Das Medium sei effektiv eindimensional, d.h. alle Größen sollen nur von x_1 abhängen (man denke zum Beispiel an Eisenbahnschienen). Zeigen Sie, dass die Wellen durch die Gleichung

$$\partial_t^2 u_i = c_i^2 \partial_{x_1}^2 u_i \quad \text{in } \mathbb{R} \times [0,T)$$

für alle $i \geq 1$ beschrieben werden, wobei die Wellengeschwindigkeit für die Longitudinalwellen u_1 und Scherwellen u_j, $j > 1$, die folgenden Beziehungen erfüllt:

$$c_1^2 = \frac{2\mu + \lambda}{\rho}, \qquad c_j^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Aufgabe 3.
Sei $L > 0$ und $I \coloneqq [-L, 0]$. Zeigen Sie, dass ein $C > 0$ existiert, sodass für jede Funktion $g \in C^1(I)$ mit $g(-L) = 0$ gilt:

$$\int_{-L}^0 |g(x)|^2 \,\mathrm{d}x \leq C \int_{-L}^0 |x|^2 |g'(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und Fubini.